# Solucionario

## CÁLCULO INTEGRAL

Fernando Araujo Rodríguez




Universidad Politécnica Salesiana

# Solucionario

de cálculo integral

*Fernando Araujo Rodríguez*

# Solucionario

## de cálculo integral




2018

**SOLUCIONARIO DE CÁLCULO INTEGRAL**


1ra edición: Universidad Politécnica Salesiana
Av. Turuhuayco 3-69 y Calle Vieja
Cuenca-Ecuador
Casilla: 2074
P.B.X. (+593 7) 2050000
Fax: (+593 7) 4 088958
e-mail: rpublicas@ups.edu.ec
www.ups.edu.ec

Área de Ciencia y Tecnología
CARRERA DE COMPUTACIÓN

Diagramación, diseño y edición: Editorial Universitaria Abya-Yala
Quito-Ecuador

Derechos de autor: 053096

ISBN UPS: 978-9978-10-296-1

Tiraje: 50 ejemplares

Impresión: Editorial Universitaria Abya-Yala
Quito-Ecuador

Impreso en Quito-Ecuador, abril de 2018

Publicación arbitrada de la Universidad Politécnica Salesiana

# Índice

# Índice de figuras

# Prefacio

El presente libro es complemento del libro Cálculo Integral, en donde a diferencia de la mayoría de libros de Cálculo, todos los ejercicios propuestos tienen respuesta y su desarrollo está hecho en esta obra.

Está orientado sobre todo a profesores de la materia para que sirva como banco de problemas a desarrollar en clase, talleres, deberes, lecciones o exámenes.

La numeración de los problemas y sus figuras guardan relación con el libro principal de tal manera de poder trabajar con ambos libros para obtener el mejor resultado.

# Solución de ejercicios propuestos sobre Cambio de Variable

## Ejercicio 1

$$\int \boldsymbol{Cos^4x\, Senx\, dx}$$

$u = Cosx \qquad du = -Senx\, dx$

$$-\int u^4 du = -\frac{u^5}{5} + C = -\frac{Cos^5x}{5} + C$$

## Ejercicio 2

$$\int \left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{x}\text{-}\mathbf{1}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{1}}\right] \boldsymbol{dx}$$

$\int \frac{dx}{2x-1} - \int \frac{dx}{2x+1} \qquad u = 2x-1 \qquad du = 2\, dx \qquad dx = {du}/{2}$

$v = 2x + 1 \qquad du = 2dx \qquad dv = {dv}/{2}$

$$\int \frac{1}{u}\ \frac{du}{2} - \int \frac{1}{v}\ \frac{dv}{2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} - \frac{1}{2}\int \frac{dv}{v}$$

$$= \frac{1}{2}[ln|u| - ln|v|] + C = \frac{1}{2} ln\left|\frac{u}{v}\right| + C = \frac{1}{2} ln\left|\frac{2x-1}{2x+1} + C\right|$$

$$= ln\sqrt{\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right|}$$

## Ejercicio 3

$$\int \frac{6e^{1/x}}{x^2} dx$$

$u = \frac{1}{x}$ $\quad du = -\frac{1}{x^2} dx$ $\quad dx = -x^2 du$

$6 \int \frac{e^u}{x^2} (-x^2 du) = -6 \int e^u du = -6e^u + C$

$= -6e^{1/x} + C$

## Ejercicio 4

$\int tg\left(\frac{x}{2}\right) sec^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$

$u = \frac{x}{2}$ $\quad du = \frac{dx}{2}$ $\quad dx = 2du$

$\int tg\, u\, Sec^2\, u\, du(2) = 2 \int tg\, u\, Sec^2\, u\, du$

$= 2 \int Sec\, u\, Sec\, u\, tg\, u\, du$ $\quad v = \mathrm{Sec}\, u$

$dv = Sec\, u\, tg\, u\, du$

$= 2 \int v\, dv = 2\frac{v^2}{2} + C = Sec^2\, u + C = Sec^2\left(\frac{x}{2}\right) + C$

## Ejercicio 5

$\int \frac{senx\, dx}{1\text{-}cosx}$

$u = 1 - Cosx$ $\quad du = -(-Senx)\mathrm{dx}$ $\quad dx = \frac{du}{Sen\, x}$

$\int \frac{Sen\, x}{u} \frac{du}{Sen\, x} = \int \frac{du}{u} = ln|u| + C = ln|1 - Cosx| + C$

# Ejercicio 6

$$\int \boldsymbol{e^{tg\ 2x} Sec^2 2x\ dx}$$

$u = 2x$ $\quad du = 2dx$ $\quad dx = \frac{du}{2}$

$\frac{1}{2}\int e^{tg\ u} Sec^2\ u\ du$ $\quad v = tg\ u$ $\quad dv = Sec^2\ u\ du$

$$\frac{1}{2}\int e^v\ dv = \frac{1}{2}e^v + C = \frac{1}{2}e^{tg\ u} + C = \frac{1}{2}e^{tg\ 2x} + C$$

# Ejercicio 7

$$\int \boldsymbol{x^3 e^{x^4} dx}$$

$u = x^4$ $\quad du = 4x^3 dx$ $\quad dx = \frac{du}{4x^3}$

$$\int x^3 e^u \frac{du}{4x^3} = \frac{1}{4}\int e^u du = \frac{1}{4}e^u + C = \frac{1}{4}e^{x^4} + C$$

# Ejercicio 8

$$\int \boldsymbol{\frac{x^2}{\sqrt[3]{1+2x}} dx}$$

$t^3 = 1 + 2x$ $\quad x = \frac{t^3 - 1}{2}$ $\quad dx = \frac{3t^2}{2}dt = \frac{3}{2}t^2 dt$

$$\int \frac{(\frac{t^3-1}{2})^2}{t}\frac{3}{2}t^2 dt = \frac{3}{8}\int (t^6 - 2t^3 + 1)tdt = \frac{3}{8}\left[\int t^7 dt - 2\int t^4 dt + \int tdt\right]$$

$$= \frac{3}{8}\left[\frac{t^8}{8} - 2\frac{t^5}{5} + \frac{t^2}{2}\right] + C$$

$$= \frac{3}{64}(\sqrt[3]{1+2x})^8 - \frac{3}{20}(\sqrt[3]{1+2x})^5 + \frac{3}{16}(\sqrt[3]{1+2x})^2 + C$$

# Ejercicio 9

$$\int \frac{\boldsymbol{x^3}}{\sqrt{\boldsymbol{x^2+1}}}\boldsymbol{dx}$$

$t^2 = x^2 + 1$ $\quad x = \sqrt{t^2\text{-}1}$ $\quad dx = \frac{1}{2}(t^2\text{-}1)^{\text{-}1/2}(2t)dt = \frac{tdt}{\sqrt{t^2\text{-}1}}$

$$\int \frac{(\sqrt{t^2\text{-}1})^3}{t} \; \frac{tdt}{\sqrt{t^2\text{-}1}} = \int (t^2\text{-}1)dt = \frac{t^3}{3}\text{-}t + C$$

$$\frac{1}{3}\left(\sqrt{x^2\text{-}1}\,)^3\text{-}\sqrt{x^2\text{-}1}\right) + C$$

# Ejercicio 10

$$\int \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x^3}}\sqrt{\boldsymbol{1}—\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x^2}}}\;\boldsymbol{dx}$$

$u = 1 - \frac{1}{x^2}$ $\quad du = \frac{2xdx}{x^4} = \frac{2}{x^3}dx$ $\quad dx = \frac{x^3}{2}du$

$$\int \frac{1}{x^3}\sqrt{u}\frac{x^3}{2}du = \frac{1}{2}\int u^{1/2}du = \frac{1}{2}\,\frac{u^{3/2}}{3/2} = \frac{1}{3}u^{3/2} + C$$

$$\frac{1}{3}(1—\frac{1}{x^2})^{3/2} + C = \frac{1}{3}\sqrt{(1—\frac{1}{x^2})^3} + C$$

# Solución de ejercicios propuestos sobre Integración por Partes

## Ejercicio 1

$$\int \boldsymbol{lnx\,dx}$$

$u = lnx$ $\quad\quad$ $dv = dx$

$du = \frac{1}{x}dx$ $\quad\quad$ $v = x$

$$\int lnxdx = xlnx\text{-}\int x\left(\frac{1}{x}\right)dx = xlnx\text{-}x + C$$

## Ejercicio 2

$$\int \boldsymbol{Sen^2xdx}$$

$u = Senx$ $\quad\quad$ $dv = Senxdx$

$du = Cosxdx$ $\quad\quad$ $v = \text{-}Cosx$

$$\int Sen^2xdx = Senx(\text{-}Cosx)\text{-}\int(\text{-}Cosx)(Cosx)dx$$

$$= \text{-}Senx\,Cosx + \int Cos^2xdx$$

$$= \text{-}Senx\,Cosx + \int(1 - Sen^2x)dx$$

$$= \text{-}Senx\,Cosx + \int dx\text{ - }\int Sen^2xdx$$

Pasando la 2da Integral al lado izquierdo de la ecuación:

$$2\int Sen^2xdx = \text{-}Senx\ Cosx + x + C$$

$$= \frac{x\text{-}Senx\ Cosx}{2} + C$$

En donde C/2 sigue siendo constante que se la representa por la misma C.

## Ejercicio 3

$$\int (\boldsymbol{x^3\text{-}2x\text{-}5})\boldsymbol{Sen2x\ dx}$$

$u = x^3\text{-}2x\text{-}5$ $\qquad v = \text{-}\frac{1}{2}Cos2x$

$du = (3x^2\text{-}2)dx$ $\qquad dv = Sen2x\ dx$

$$\int(x^3\text{-}2x\text{-}5)Sen2x\ dx = (x^3\text{-}2x\text{-}5)\left(\text{-}\frac{1}{2}Cos2x\right)\text{-}\int\left(\text{-}\frac{1}{2}Cos2x\right)(3x^2\text{-}2)dx$$

$$\text{-}\frac{1}{2}(x^3\text{-}2x\text{-}5)Cos2x + \frac{1}{2}\int(3x^2\text{-}2)Cos2x\ dx$$

$u = 3x^2\text{-}2$ $\qquad v = \frac{1}{2}Sen2x$

$du = 6x\ dx$ $\qquad dv = Cos2x\ dx$

$$= \text{-}\frac{1}{2}(x^3\text{-}2x\text{-}5)Cos2x + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(3x^2\text{-}2)Sen2x\text{-}\int\frac{1}{2}Sen2x(6x)dx\right]$$

$$= \text{-}\frac{1}{2}(x^3\text{-}2x\text{-}5)Cos2x + \frac{1}{4}(3x^2\text{-}2)Sen2x\text{-}\frac{6}{4}\int xSen2xdx$$

$u = x$ $\qquad v = \frac{1}{2}(\text{-}Cos2x)$

$du = dx$ $\qquad dv = Sen2x\ dx$

$$= \text{-}\frac{1}{2}(x^3\text{-}2x\text{-}5)Cos2x + \frac{1}{4}(3x^2\text{-}2)Sen2x\text{-}\frac{6}{4}\left[\text{-}\frac{1}{2}xCos2x + \frac{1}{2}\int Cos2x\ dx\right]$$

$$= -\frac{1}{2}(x^3-2x-5)Cos2x + \frac{1}{4}(3x^2-2)Sen2x + \frac{6}{8}xCos2x - \frac{6}{8}\cdot\frac{1}{2}Sen2x + C$$

$$= -\frac{1}{2}(x^3-2x-5)Cos2x + \frac{1}{4}(3x^2-2)Sen2x + \frac{3}{4}xCos2x - \frac{3}{8}Sen2x + C$$

## Ejercicio 4

$$\int \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{e^x}}\boldsymbol{dx}$$

$u = x$ $\qquad v = -e^{-x}$

$du = dx$ $\qquad dv = e^{-x}dx$

$\int \frac{x}{e^x}dx = -xe^{-x} - \int(-e^{-x})du = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx$

$= -xe^{-x} - e^{-x} + C$

## Ejercicio 5

$$\int \boldsymbol{e^{3x}Sen2xdx}$$

$u = e^{3x}$ $\qquad v = -\frac{1}{2}Cos2x$

$du = 3e^{3x}dx$ $\qquad dv = Sen2xdx$

$$\int e^{3x}Sen2xdx = -\frac{1}{2}e^{3x}Cos2x - \int\left(-\frac{1}{2}Cos2x\right)(3e^{3x})dx$$

$= -\frac{1}{2}e^{3x}Cos2x + \frac{3}{2}\int e^{3x}Cos2x\,dx$

$u = e^{3x}$ $\qquad v = \frac{1}{2}Sen2x$

$du = 3e^{3x}d$ $\qquad dv = Cos2xdx$

$$\int e^{3x}Sen2xdx = -\frac{1}{2}e^{3x}Cos2x + \frac{3}{2}\left[\frac{1}{2}e^{3x}Sen2x - \frac{3}{2}\int e^{3x}\,Sen2xdx\right]$$

$= -\frac{1}{2}e^{3x}Cos2x + \frac{3}{4}e^{3x}Sen2x - \frac{9}{4}\int e^{3x}Sen2xdx$

$$\frac{13}{4}\int e^{3x}\,Sen2xdx = -\frac{1}{2}e^{3x}Cos2x + \frac{3}{4}e^{3x}Sen2x$$

$$\int e^{3x}\,Sen2xdx = \frac{4}{13}\left[-\frac{1}{2}e^{3x}Cos2x + \frac{3}{4}e^{3x}Sen2x\right] + C$$

$= \frac{1}{13}e^{3x}(3Sen2x-2Cos2x) + C$

## Ejercicio 6

$$\int \frac{\boldsymbol{lnx}}{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{dx}$$

$u = lnx$ $\qquad v = lnx$

$du = \frac{1}{x}dx$ $\qquad dv = \frac{1}{x}dx$

$$\int \frac{lnx}{x}dx = ln^2x - \int \frac{lnx}{x}dx$$

$2\int \frac{ln}{x}dx = ln^2x$ $\qquad \int \frac{lnx}{x}dx = \frac{ln^2x}{2} + C$

## Ejercicio 7

$$\int \boldsymbol{arc\ cotgx\ dx}$$

$u = arc\ cotgx$ $\qquad v = x$

$du = \frac{1}{1+x^2}dx$ $\qquad dv = dx$

$$\int arc\ cotgx\ dx = xarc\ cotgx - \int \frac{x}{1+x^2}dx$$

Sustitución: $v = 1 + x^2$ $\qquad dv = 2xdx$ $\qquad dx = \frac{dv}{2x}$

$$= x\ arc\ cotgx\text{-} \int \frac{x}{v}\frac{dv}{2x} = x\ arc\ cotgx\text{-}\frac{1}{2}\int \frac{dv}{v}$$

$$= x\ arc\ cotgx\text{-}\tfrac{1}{2}\ln|v| + C = x\ arc\ cotgx\text{-}\tfrac{1}{2}\,ln|1 + x^2| + C$$

## Ejercicio 8

$$\int (\boldsymbol{x^2 + 3})\boldsymbol{3x^2 dx}$$

$u = x^2 + 3$ $\qquad v = x^3$

$du = 2xdx$ $\qquad dv = 3x^2dx$

$$\int (x^2 + 3)3x^2dx = (x^2 + 3)x^3\text{-} \int x^3(2x\ dx)$$

$$= x^5 + 3x^3\text{-}2\int x^4dx = x^5 + 3x^3\text{-}2\,\tfrac{x^5}{5} + C$$

$$= \tfrac{3}{5}x^5 + 3x^3 + C$$

## Ejercicio 9

$$\int \frac{\boldsymbol{arc\ Sen\sqrt{x}}}{\boldsymbol{\sqrt{x}}}\boldsymbol{dx}$$

$u = arc\ Sen\sqrt{x}$ $\qquad v = 2\sqrt{x}$

$du = \frac{1}{\sqrt{1-x}}\frac{dx}{2\sqrt{x}}$ $\qquad dv = \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

$$\int \frac{arc\ Sen\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\ arc\ Sen\sqrt{x}\text{-} \int \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\frac{dx}{2}$$

$$= 2\sqrt{x}\ arc\ Sen\sqrt{x}\text{-}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

Sustitución sea: $t = 1 - x$ $\qquad dt = \text{-}dx$ $\qquad dx = \text{-}dt$

$$= 2\sqrt{x}\, arc\ Sen\sqrt{x} - \int -\frac{dt}{t^{1/2}} = 2\sqrt{x}\, arc\ Sen\sqrt{x} + \int t^{-1/2} dt$$

$$= 2\sqrt{x}\, arc\ Sen\sqrt{x} + \frac{t^{1/2}}{1/2} + C = 2\sqrt{x}\, arc\ Sen\sqrt{x} + 2\sqrt{1-x} + C$$

# Solución de ejercicios propuestos sobre Integrales Trigonométricas

## Ejercicio 1

$$\int \boldsymbol{Sen^2 4xdx}$$

$$= \int \frac{1}{2}(1 - Cos8x)dx = \frac{1}{2}x\text{-}\frac{1}{2}\frac{Sen8x}{8} + C = \frac{1}{2}x\text{-}\frac{1}{16}Sen8x + C$$

## Ejercicio 2

$$\int \boldsymbol{Cos^5 xdx}$$

$$= \int Cos^4 xCosdx = \int (1 - Sen^2 x)^2 Cosxdx = \int (1 - Sen^2 x + Sen^4 x)Cos$$

$$= \int Cosxdx\text{-}2\int Sen^2 xCosxdx + \int Sen^4 xCosxdx$$

Sea: $u = Senx \qquad du = Cosxdx$

$$= Senx\text{-}2\int u^2 du + \int u^4 du = Senx\text{-}\frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + C$$

$$= Senx\text{-}\frac{2}{3}Sen^3 x + \frac{1}{5}Sen^5 x + C$$

## Ejercicio 3

$$\int \boldsymbol{Sen^3 3xdx}$$

$= \int Sen\ 3x(1 - Cos^2 3x) = \int Sen3x\ dx - \int Cos^2 3x\ Sen3x\ dx$

$u = Cos3x \quad du = -3Sen3xdx$

$= -\frac{1}{3}Cos3x - \left(-\frac{1}{3}\right)\int u^2 du = -\frac{1}{3}Cos3x + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{u^3}{3}\right) + C$

$= -\frac{1}{3}Cos3x + \frac{1}{9}Cos^3 3x + C$

Comprobación

$-\frac{1}{3}3(-Sen3x) + \frac{1}{9}(3Cos^2 3x \cdot (-Sen3x)(3))$

$= Sen3x - Sen3xCos^2 3x = Sen3x(1 - Cos^2 3x) = Sen^3 3x$

## Ejercicio 4

$$\int \boldsymbol{Cos^4 xdx}$$

$\int Cos^4 xdx = \int (Cos^2 x)^2 dx = \int \left[\frac{1}{2}(1 + Cos2x)\right]^2 dx$

$= \frac{1}{4}\int (1 + 2Cos2x + Cos^2 2x)dx = \frac{1}{4}\int \left[1 + 2Cos2x + \frac{1}{2}(1 + Cos4x)dx\right]$

$= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int Cos2xdx + \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int Cos4xdx$

$= \frac{1}{4}x + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)Sen2x + \frac{1}{8}x + \left(\frac{1}{32}\right)Sen4x + C$

$$=\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}Sen2x+\frac{1}{32}Sen4x+C$$

## Ejercicio 5

$$\int \boldsymbol{Sen^5xCos^2xdx}$$

$$=\int Senx\ Sen^4x\ Cos^2xdx=\int Senx(1-Cos^2x)^2Cos^2xdx$$

$$=\int Senx(1-2Cos^2x+Cos^4x)Cos^2xdx$$

$$=\int (Cos^2x\ Senx\ dx\text{-}2Cos^4x\ Senx\ dx+\ Cos^6x\ Senx)dx$$

$u=Cosx$ $\qquad\qquad du=\text{-}Senxdx$

$$\text{-}\int u^2du+2\int u^4du\text{-}\int u^6du=\text{-}\frac{u^3}{3}+2\frac{u^5}{5}\text{-}\frac{u^7}{7}+C$$

$$=\text{-}\frac{1}{3}Cos^3x+\frac{2}{5}Cos^5x\text{-}\frac{1}{7}Cos^7x+C$$

## Ejercicio 6

$$\int \boldsymbol{Sen^2xCos^2xdx}$$

$$=\int\frac{1}{2}(1-Cos2x)\frac{1}{2}(1+Cos2x)dx=\frac{1}{4}\int(1-Cos^22x)dx=\frac{1}{4}\int Sen^22xdx$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{1}{2}(1-Cos4x)dx=\frac{1}{8}\int dx\text{-}\frac{1}{8}\int Cos4xdx$$

$$=\frac{1}{8}x\text{-}\frac{1}{8}\frac{Sen4x}{4}+C=\ \frac{1}{8}x\text{-}\frac{1}{32}Sen4x+C$$

## Ejercicio 7

$$\int \boldsymbol{Sen^4 3xCos^2 3xdx}$$

$$= \int Sen^2 3x\, Sen^2 3x\, Cos^2 3x\, dx = \int \frac{1}{2}(1 - Cos6x)\, \frac{1}{2}(1 - Cos6x)\frac{1}{2}(1 + Cos6x)dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1 - Cos6x)(1 - Cos^2 6x)dx = \frac{1}{8}\int (1 - Cos^2 6x\text{-}Cos6x + Cos^3 6x)dx$$

$$= \frac{1}{8}\int dx\, \text{-}\frac{1}{8}\int \frac{1}{2}(1 + Cos12x)dx\, \text{-}\frac{1}{8}\int Cos6xdx + \frac{1}{8}\int Cos6xCos^2 6xdx$$

$$= \frac{1}{8}x\text{-}\frac{1}{16}\int dx\, \text{-}\frac{1}{16}\int Cos12xdx\, \text{-}\frac{1}{8}\int Cos6xdx + \frac{1}{8}\int Cos6x(1 - Sen^2 6x)dx$$

$$= \frac{1}{8}x\text{-}\frac{1}{16}x\text{-}\frac{1}{16}\frac{Sen12x}{12}\text{-}\frac{1}{8}\frac{Sen6x}{6} + \frac{1}{8}\int Cos6xdx\, \text{-}\frac{1}{8}\int Cos6xSen^2 6xdx$$

$Sea\ u = Sen6x;\ \ du = 6Cos6x$

$$= \frac{1}{16}x\text{-}\frac{Sen12x}{192}\text{-}\frac{Sen6x}{48} + \frac{Sen6x}{48}\text{-}\frac{1}{8}\int \frac{u^2}{6}du$$

$$= \frac{1}{16}x\text{-}\frac{Sen12x}{192}\text{-}\frac{1}{48}\frac{u^3}{3} = \frac{1}{16}x\text{-}\frac{Sen12x}{192}\text{-}\frac{Sen^3 6x}{144} + C$$

## Ejercicio 8

$$\int \boldsymbol{Cos\, 3x\, Cos2x\, dx}$$

$$Cos^m 3x\, Cos^n 2x = \frac{1}{2}[Cos\, 5x + Cos\, x]$$

$$= \frac{1}{2}\int Cos5x\, dx + Cosx\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{Sen\, 5x}{5}\text{-}Senx\right] = \frac{1}{10}Sen5x + \frac{1}{2}Senx + C$$

## Ejercicio 9

$$\int \boldsymbol{Sen\ 3x\ Cos5x}$$

$$= \frac{1}{2}\int [Sen8x + Sen(-2x)]dx = \frac{1}{2}\int Sen8x\ dx\text{-}\frac{1}{2}\int Sen2x\ dx$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{8}\right)(\text{-}Cos8x)\text{-}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)(\text{-}Cos2x) + C = \text{-}\frac{1}{16}Cos8x + \frac{1}{4}Cos2x + C$$

## Ejercicio 10

$$\int \boldsymbol{tg^4\ xdx}$$

$$\int tg^2\ xtg^2xdx = \int (Sec^2x\text{-}1)tg^2xdx = \int tg^2xSec^2xdx\text{-}\int tg^2xdx$$

Sea: $u = tgx$ $\quad du = Sec^2x$ $\quad \int u^2du\text{-}\int(Sec^2x\text{-}1)dx$

$$\int u^2du\text{-}\int Sec^2xdx + \int dx = \frac{u^3}{3}\text{-}tgx + x = \frac{tg^3x}{3}\text{-}tgx\text{-}x + C$$

## Ejercicio 11

$$\int \boldsymbol{Cotg^4\ xdx}$$

$$= \int Cotg^2x\ Cotg^2x = \int Cotg^2x\left(Cosc^2x\text{-}1\right)dx = \int (Cotg^2x\ Cosc^2x\text{-}Cotg^2x)$$

$$= \int Cotg^2x\ Cosc^2x\ dx\text{-}\int Cotg^2xdx \qquad u = Cotg\ \ du = \text{-}Cosc^2xdx$$

$$= \text{-}\int u^2du\text{-}\int (Cosc^2x\text{-}1)dx = \text{-}\int u^2du\text{-}\int Cosc^2x + \int dx$$

$$= -\frac{u^3}{3} + Cotgx + x + C = -\frac{Cotg^3x}{3} + Cotgx + x + C$$

## Ejercicio 12

$$\int \boldsymbol{tg^4x\, Sec^4\, xdx}$$

$$= \int tg^4x\, Sec^2x\, Sec^2x\, dx = \int tg^4x(tg^2x + 1)Sec^2xdx$$

$$= \int tg^4x\, tg^2x\, Sec^2xdx + \int tg^4x\, Sec^2xdx$$

$$= \int tg^6x\, Sec^2xdx + \int tg^4x\, Sec^2xdx \qquad u = tgx \qquad du = Sec^2xdx$$

$$= \int u^6du + \int u^4du = \frac{u^7}{7} + \frac{u^5}{5} + C = \frac{tg^7x}{7} + \frac{tg^5x}{5} + C$$

## Ejercicio 13

$$\int \boldsymbol{Cotg^3x\, Csc^4xdx}$$

$$Csc^2x = 1 + Cotg^2x$$

$$= \int Cotg^3x(1 + Cotg^2x)\, Csc^2x\, dx = \int Cotg^3xCsc^2x\, dx + \int Cotg^5xCsc^2x\, dx$$

$$u = Cotgx \qquad du = -Csc^2xdx$$

$$-\int u^3du - \int u^5du = -\frac{u^4}{4} - \frac{u^6}{6} + C = -\frac{Cotg^4x}{4} - \frac{Cotg^6x}{6} + C$$

## Ejercicio 14

$$\int \sqrt{\boldsymbol{tgx\, Sec^4x}}\ \boldsymbol{dx}$$

$$= \int tg^{1/2}x\ Sec^4x\ dx$$

$$= \int tg^{1/2}x\ Sec^2x\ Sec^2x\ dx = \int tg^{1/2}(1 + tg^2x)Sec^2xdx$$

$$= \int tg^{1/2}x\ \ Sec^2x\ dx + \int tg^{5/2}Sec^2xdx \qquad u = tgx \qquad du = Sec^2xdx$$

$$= \int u^{1/2}du + \int u^{5/2}\ du = \frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} + \frac{u^{7/2}}{\frac{7}{2}} + C = \frac{2}{3}tg^{(3/2)}x + \frac{2}{7}tg^{(7/2)}x + C$$

# Solución de ejercicios propuestos sobre Sustitución Trigonométrica

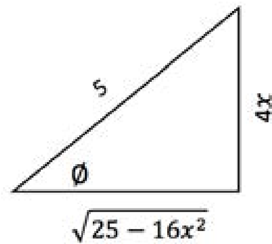
## Ejercicio 1

$$\int \frac{\sqrt{25\text{-}16x^2}}{x} dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{\frac{16}{16}(25-16x^2)}}{x} dx = \int \frac{4\sqrt{\frac{25}{16}\text{-}x^2}}{x} dx$$

$a^2 = \frac{25}{16} \rightarrow a = \frac{5}{4}$ $\quad x = \frac{5}{4} Sen\emptyset \quad dx = \frac{5}{4} Cos\emptyset \, d\emptyset$

$$= 4 \int \frac{\sqrt{\frac{25}{16}\text{-}\frac{25}{16} Sen^2\emptyset}}{\frac{5}{4} Sen\emptyset} \frac{5}{4} Cos\emptyset \, d\emptyset$$




$$= 4 \int \frac{Cos\emptyset}{Sen\emptyset} \sqrt{\frac{25}{16}(1 - Sen^2\emptyset)} \, d\emptyset$$

$$= 4 \int \frac{Cos\emptyset}{Sen\emptyset} \frac{5}{4} Cos\emptyset \, d\emptyset = 5 \int \frac{Cos^2\emptyset}{Sen\emptyset} \, d\emptyset$$

$$= 5 \int \frac{(1 - Sen^2\emptyset)}{Sen\emptyset} d\emptyset = 5 \int \frac{1}{Sen\emptyset} \, d\emptyset\text{-}5 \int Sen\emptyset \, d\emptyset$$

$$= 5 \int Csc\emptyset \, d\emptyset\text{-}5 \int Sen\emptyset \, d\emptyset = 5ln|Csc\emptyset\text{-}Cotg\emptyset| + 5Cos\emptyset + C$$

Del triángulo rectángulo podemos obtener la siguiente relación:

$$csc\phi = \frac{5}{4x};\ cotg\phi = \frac{\sqrt{25-16x^2}}{4x};\ cos\phi = \frac{\sqrt{25-16x^2}}{5}$$

Reemplazando estos valores se tiene:

$$\int \frac{\sqrt{25-16x^2}}{x}dx = 5ln\left|\frac{5}{4x}\text{-}\frac{\sqrt{25-16x^2}}{4x}\right| + 5\left(\frac{\sqrt{25-16x^2}}{5}\right) + C$$

$$= 5ln\left|\frac{5-\sqrt{25-16x^2}}{4x}\right| + \sqrt{25-16x^2} + C$$

## Ejercicio 2

$$\int \frac{\boldsymbol{x^4}}{\sqrt{(\boldsymbol{1}\text{-}\boldsymbol{x^2})^3}}\boldsymbol{dx}$$

$a = 1 \qquad x = Sent \qquad dx = Cost\ dt$

$$\int \frac{Sen^4t}{\sqrt{(1-Sen^2t)^3}}Cost\ dt = \int \frac{Sen^4t}{\sqrt{(Cos^2t)^3}}Cost\ dt = \int \frac{Sen^4t}{Cos^3t}Cost\ dt$$

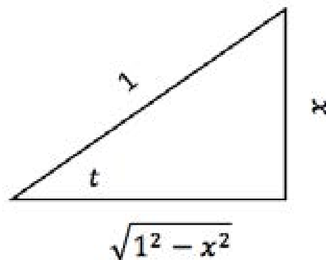
$$\int \frac{Sen^4t}{Cos^2t}dt = \int \frac{(1-Cos^2t)^2}{Cos^2t}dt = \int \frac{1-2Cos^2t+Cos^4t}{Cos^2t}dt$$

$$\int \frac{1}{Cos^2t}\text{-}2\int dt + \int Cos^2t\ dt = \int Sec^2t\ dt\text{-}2\int dt + \int \frac{1}{2}(1+Cos2t)dt$$

$$= tgt\text{-}2t + \frac{1}{2}t + \frac{Sen\ 2t}{4} + C$$

$$= tgt\text{-}\frac{3}{4}t + 2\frac{Sent\ Cost}{4} + C$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\text{-}\frac{3}{4}\ arc\ Senx + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$$



## Ejercicio 3

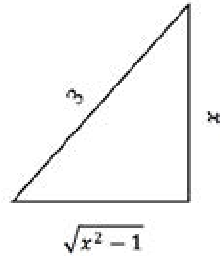
$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9\text{-}x^2}}$$

$x = 3Sen\theta \qquad dx = 3Cos\theta\ d\theta \qquad Sen\theta = \frac{x}{3}$

$$\int \frac{3Cos\theta\ d\theta}{9Sen^2\theta\sqrt{9 - 9Sen^2\theta}} = \frac{1}{3}\int \frac{Cos\theta\ d\theta}{Sen^2\theta\ 3\sqrt{1 - Sen^2\theta}} = \frac{1}{9}\int \frac{Cos\theta\ d\theta}{Sen^2\theta\ Cos\theta}$$

$$= \frac{1}{9}\int Csc^2\theta\ d\theta = \text{-}\frac{1}{9}Cotg\theta + C$$

$$= \text{-}\frac{1}{9}\ \frac{\sqrt{9-x^2}}{x} + C$$




## Ejercicio 4

$$\int \frac{\sqrt{x^2\text{-}4}}{x}dx$$

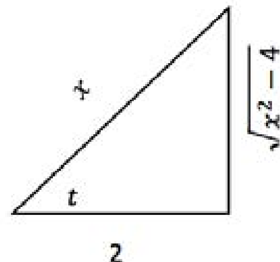
$x = 2Sect \quad dx = 2Sect\ tgt$

$$\int \frac{\sqrt{4Sec^2t\text{-}4}}{2Sect}\ 2Sect\ tgt\ dt = \int \frac{\sqrt{4(Sec^2t\text{-}1)}}{1}tg\ t\ dt$$

$$\int 2\sqrt{tg^2t}\ tgt\ dt = 2\int tg^2t\ dt = 2\int (Sec^2t\text{-}1)dt = 2\int Sec^2t\ dt\text{-}2\int dt$$

$$= 2tgt\text{-}2t + C = 2\frac{\sqrt{x^2\text{-}4}}{2}\text{-}2\ arc\ Cos\left(\frac{2}{x}\right) + C$$

$R$: $\sqrt{x^2\text{-}4}\text{-}2\ arc\ Sec\frac{x}{2} + C$



## Ejercicio 5

$$\int \frac{\boldsymbol{x^3 dx}}{\sqrt{\boldsymbol{4\text{-}9x^2}}}$$

$$= \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{\frac{9}{9}(4-9x^2)}} = \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{9(\frac{4}{9}\text{-}\frac{9}{9}x^2)}} = \int \frac{x^3\,dx}{3\sqrt{(\frac{4}{9}\text{-}x^2)}}$$

$$a^2 = \frac{4}{9} \rightarrow a = \frac{2}{3} \qquad x^2 = \frac{4}{9}Sen^2t \rightarrow x = \frac{2}{3}Sent \qquad dx = \frac{2}{3}Cost\;dt$$

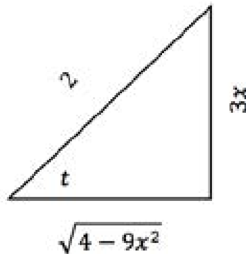
$$= \frac{1}{3}\int \frac{\frac{8}{27}Sen^3t}{\sqrt{\frac{4}{9}\text{-}\frac{4}{9}Sen^2t}}\frac{2}{3}Cost\;dt \;= \frac{1}{3}\cdot\frac{8}{27}\cdot\frac{2}{3}\int \frac{Sen^3t}{\sqrt{\frac{4}{9}(1-Sen^2t)}}\;Cost\;dt$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{8}{27}.\frac{2}{3}\int \frac{Sen^3t}{\frac{2}{3}Cost}Cost\;dt = \frac{8}{81}\int Sen^3t\;dt$$

$$= \frac{8}{81}\int Sen^2t\;Sent\;dt = \frac{8}{81}\int(1-Cos^2t)Sent\;dt =$$

$$Sea: u = Cos\;t \qquad du = Sen\;t\;dt$$

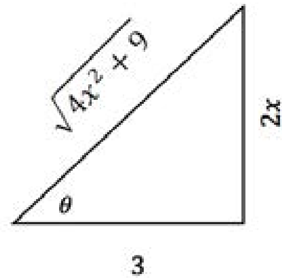
$$= \frac{8}{81}\int Sent\;dt\text{-}\frac{8}{81}\int Cos^2t\;Sent\;dt = \text{-}\frac{8}{81}Cost + \frac{8}{81}\frac{Cos^3t}{3} + C$$



$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{4-9x^2}} = -\frac{8}{81}\;\frac{\sqrt{4-9x^2}}{2} + \frac{8}{243}\;(\frac{\sqrt{4-9x^2}}{2})^3 + C$$

$$\frac{8}{81}\;\frac{\sqrt{4-9x^2}}{2}\left[\frac{1}{3}\;(\frac{\sqrt{4-9x^2}}{2})^2\text{-}1\right] + C$$

## Ejercicio 6




$$\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{x\sqrt{9+4x^2}}}$$

$$x = \frac{3}{2}tg\theta \quad dx = \frac{3}{2}Sec^2\theta\; d\theta$$

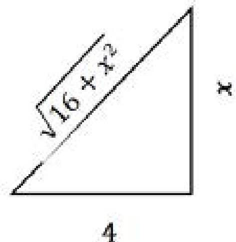
$$\int \frac{\frac{3}{2}Sec^2\theta\; d\theta}{\frac{3}{2}tg\theta\;\sqrt{9+4\left(\frac{9}{4}tg^2\theta\right)}} = \int \frac{Sec^2\theta\; d\theta}{tg\theta\sqrt{9+9tg^2\theta}} = \frac{1}{3}\int \frac{Sec^2\theta\; d\theta}{tg\theta\; Sec\theta}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{Sec\theta\; d\theta}{tg\theta} = \frac{1}{3}\int \frac{1}{Cos\theta}\;\frac{Cos\theta}{Sen\theta}d\theta = \frac{1}{3}\int Csc\theta\; d\theta$$

$$= \frac{1}{3}ln|Csc\theta\text{-}Cotg\theta| + C = \frac{1}{3}ln\left|\frac{\sqrt{4x^2+9}}{2x}\text{-}\frac{3}{2x}\right| + C$$

$$= \frac{1}{3}ln\left|\frac{\sqrt{4x^2+9}\text{-}3}{2x}\right| + C$$

## Ejercicio 7




$$\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{(16+x^2)^4}}$$

$$x = 4tg\theta \qquad dx = 4Sec^2\theta\; d\theta$$

$$\int \frac{4Sec^2\theta\ d\theta}{(\sqrt{16+16tg^2\theta})^4} = 4\int \frac{Sec^2\theta\ d\theta}{4Sec^4\theta} = \frac{1}{64}\int \frac{d\theta}{Sec^2\theta} = \frac{1}{64}\int Cos^2\theta\ d\theta$$

$$= \frac{1}{64}\int \frac{1}{2}(1+Cos2\theta)d\theta = \frac{1}{128}\int d\theta + \frac{1}{128}\int Cos2\theta\ d\theta$$

$$\frac{1}{128}\theta + \frac{1}{256}Sen2\theta + C = \frac{1}{128}\theta + \frac{1}{256}(2Sen\theta\ Cos\theta) + C$$

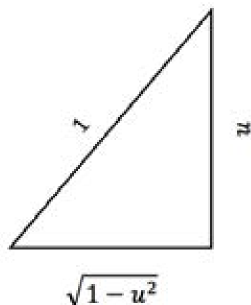
$$\frac{\theta}{128} + \frac{1}{128}Sen\theta\ Cos\theta + C = \frac{1}{128}\left(arc\ tg\ \frac{x}{4} + \frac{x}{\sqrt{16+x^2}}\cdot\frac{4}{\sqrt{16+x^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{128}\left(arc\ tg\ \frac{x}{4} + \frac{4x}{16+x^2}\right) + C$$

## Ejercicio 8

$$\int \frac{\boldsymbol{x^2}}{\sqrt{\boldsymbol{2x\text{-}x^2}}}\boldsymbol{dx}$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{2x\text{-}x^2}}dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-(x^3\text{-}2x\text{-}1)}}dx$$




completando "cuadrados"

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1\text{-}(x\text{-}1)^2}}dx$$

Sea: $u = x\text{-}1$ $\quad du = dx$

$x = u + 1 \rightarrow x^2 = u^2 + 2u + 1$

$$\int \frac{u^2+2u+1}{\sqrt{1-u^2}}du$$

Aplicando caso Sust. Trigonométrica

$u = Sent$ $\quad du = Cost\ dt$

$$= \int \frac{Sen^2t + 2Sent + 1}{\sqrt{1-Sen^2t}}Cost\ dt = \int Sen^2t\ dt + 2\int Sent\ dt + \int dt$$

$$= \int \frac{1}{2}(1 - Cos2t)dt + 2\int Sent\ dt + \int dt$$

$$= \frac{1}{2}\int dt - \frac{1}{2}\int Cos2t\ dt + 2\int Sent\ dt + \int dt = \frac{3}{2}t - \frac{1}{2}\ \frac{Sen2t}{2} - 2Cost + C$$

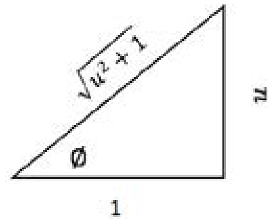
$$= \frac{3}{2}t - \frac{1}{4}Sen2t - 2Cost + C = \frac{3}{2}t - \frac{1}{4}(2Sent\ Cost) - 2Cost + C$$

$$= \frac{3}{2}\ arc\ Sen\ u - \frac{1}{2}u\ \frac{\sqrt{1-u^2}}{1} - 2\frac{\sqrt{1-u^2}}{1} + C$$

$$= \frac{3}{2}\ arc\ Sen(x\text{-}1) - \frac{1}{2}(x\text{-}1)\sqrt{1-(x\text{-}1)^2} - 2\sqrt{1-(x\text{-}1)^2} + C$$

## Ejercicio 9

$$\int \frac{\boldsymbol{e^x}}{\sqrt{\boldsymbol{1 + e^{2x}}}}\boldsymbol{dx}$$




$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1 + (e^x)^2}}dx \qquad u = e^x \qquad du = e^x\ dx$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} \quad a = 1; \quad u = 1tg\emptyset \ ; \ du = Sec^2\emptyset\ d\emptyset$$

$$\int \frac{Sec^2\emptyset\ d\emptyset}{\sqrt{1 + tg^2\emptyset}} = \int \frac{Sec^2\emptyset\ d\emptyset}{\sqrt{Sec^2\emptyset}} = \int \frac{Sec^2\emptyset\ d\emptyset}{Sec\emptyset}$$

$$\int \frac{Sec^2\emptyset\ d\emptyset}{\sqrt{1 + tg^2\emptyset}} = \int \frac{Sec^2\emptyset\ d\emptyset}{\sqrt{Sec^2\emptyset}} = \int \frac{Sec^2\emptyset\ d\emptyset}{Sec\emptyset}$$

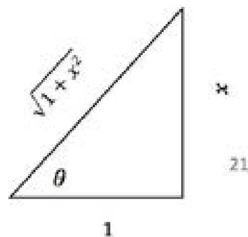
$$\int Sec\emptyset\ d\emptyset = ln|Sec\emptyset + tg\emptyset| + C$$

$$tg\emptyset = \frac{u}{1} \qquad \int Sec\emptyset\ d\emptyset = ln\left|\frac{\sqrt{u^2+1}}{1} + u\right| + C$$

$$= \ln\left|\sqrt{e^{2x}+1} + e^x\right| + C$$

## Ejercicio 10

$$\int \frac{\boldsymbol{dx}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{x}^2)^2}$$




$$\int \frac{dx}{[(1+x^2)^{1/2}]^4} = \int \frac{dx}{(\sqrt{\mathbf{1}+\boldsymbol{x}^2})^4}$$

$x = tg\theta \quad dx = Sec^2\theta\, d\theta$

$$= \int \frac{Sec^2\theta\, d\theta}{(\sqrt{1+tg^2\theta})^4} = \int \frac{Sec^2\theta\, d\theta}{Sec^4\theta} = \int \frac{d\theta}{Sec^2\theta} = \int Cos^2\theta\, d\theta$$

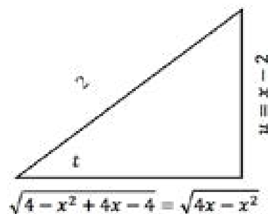
$$= \int \frac{1}{2}(1+Cos2\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int \theta\, d\theta + \frac{1}{2}\int Cos2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}Sen2\theta + C$$

$$= \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}(2Sen\theta\, Cos\theta) + C = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}Sen\theta\, Cos\theta + C$$

$$= \frac{1}{2}\, arc\, tgx + \frac{1}{2}\ \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ \ \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + C$$

$$= \frac{1}{2}\left(arc\, tgx + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) + C$$

## Ejercicio 11




$$\int \frac{\boldsymbol{dx}}{(\mathbf{4}\boldsymbol{x}\text{-}\boldsymbol{x}^2)^{3/2}}$$

$$\int \frac{dx}{[(-x^2+4x-4)+4]^{3/2}} = \int \frac{dx}{[4-(x^2-4x+4)]^{3/2}}$$

$$= \int \frac{dx}{\left[4-(x-2)^2\right]^{3/2}} \qquad Sea\; u = x-2 \quad du = dx$$

$$= \int \frac{du}{[4-u^2]^{3/2}} \qquad u = 2Sent \quad du = 2Cost\,dt$$

$$= \int \frac{2Cost\,dt}{(\sqrt{4-4Sen^2 t})^3} = 2\int \frac{Cost\,dt}{(2\sqrt{1-Sen^2 t})^3} = \frac{2}{8}\int \frac{Cost\,dt}{Cos^3 t}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{dt}{Cos^2 t} = \frac{1}{4}\int Sec^2 t\,dt = \frac{1}{4}tgt + C = \frac{1}{4}\ \frac{x\text{-}2}{\sqrt{4x\text{-}x^2}} + C$$

## Ejercicio 12

$$\int \frac{\boldsymbol{dx}}{(\boldsymbol{4x^2\text{-}24x+27})^{3/2}}$$

$$= \int \frac{dx}{\left[4\left(x^2\text{-}6x+\frac{27}{4}\right)\right]^{3/2}}$$

$$= \int \frac{dx}{\left[4(x^2\text{-}6x+9)\text{-}36+\frac{4\cdot 27}{4}\right]^{3/2}} = \int \frac{dx}{[4(x\text{-}3)^2\text{-}9]^{3/2}}$$

$$4(x\text{-}3)^2 = 9Sec^2 t \rightarrow 2(x\text{-}3) = 3Sect \rightarrow x\text{-}3 = \frac{3}{2}Sect \rightarrow dx = \frac{3}{2}Sect\ tgt\ dt$$

$$= \int \frac{\frac{3}{2}Sect\ tgt\ dt}{(\sqrt{9Sec^2 t\text{-}9})^3} = \frac{3}{2}\int \frac{Sect\ tgt\ dt}{(\sqrt{9Sec^2 t\text{-}1})} = \frac{3}{2}\int \frac{Sect\ tgt\ dt}{(3\sqrt{tg^2 t})^3} =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{Sect\ tgt\ dt}{27\ tg^3 t} = \frac{1}{18}\int \frac{Sect\ dt}{tg^2 t} = \frac{1}{18}\int \frac{1}{Cost}\ \frac{Cos^2 t}{Sen^2 t}dt = \frac{1}{18}\int \frac{Cost}{Sen^2 t}dt$$

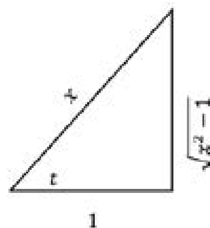
$u = Sent \quad du = Cost\,dt$

$$= \frac{1}{18}\int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{18}\int u^{\text{-}2}du = \frac{1}{18}\ \frac{u^{\text{-}1}}{\text{-}1} + C = \text{-}\frac{1}{18}\ \frac{1}{Sent} + C$$

$$= \text{-}\frac{1}{18}\ \frac{2(x\text{-}3)}{\sqrt{(4x^2\text{-}24x+27)}} = \text{-}\frac{1}{9}\ \frac{x\text{-}3}{\sqrt{(4x^2\text{-}24x+27)}} + C$$

## Ejercicio 13

$$\int \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x^2\text{-}1}} \boldsymbol{dx}$$




Sustitución $\quad x = a\,Sect \qquad a = 1$

$$x = Sect \qquad dx = Sect\,tgt\,dt$$

$$= \int \frac{Sect\,tgt\,dt}{Sec^2t\text{-}1} = \int \frac{Sect\,tgt\,dt}{tg^2t} = \int \frac{Sect}{tgt}dt = \int \frac{1}{Cost}\ \frac{Cost}{Sent}dt$$

$$\int \frac{1}{Sent}dt = \int Csct\,dt = ln|Csct\text{-}Cotg\,t| + C$$

$$= ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2\text{-}1}}\text{-}\frac{1}{\sqrt{x^2\text{-}1}}\right| + C = ln\left|\frac{x\text{-}1}{\sqrt{x^2\text{-}1}}\right| + C$$

$$= ln\left|\frac{(x\text{-}1)\sqrt{x^2\text{-}1}}{x^2\text{-}1}\right| + C = ln\left|\frac{(x\text{-}1)\sqrt{x^2\text{-}1}}{(x+1)(x\text{-}1)}\right| = ln\left|\frac{x^2\text{-}1}{x+1}\right|$$

## Ejercicio 14

$$\int \frac{\boldsymbol{lnx\,dx}}{\boldsymbol{x\sqrt{1\text{-}4lnx\text{-}ln^2x}}}$$

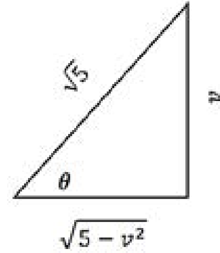
$$Sea\!: u = lnx \to du = \frac{1}{x}dx$$

$$\int \frac{u\,du}{\sqrt{1-4u\text{-}u^2}} = \int \frac{u\,du}{5-(-5+1-4u\text{-}u^2)} = \int \frac{u\,du}{\sqrt{5+(-4-4u\text{-}u^2)}}$$

$$= \int \frac{u\,du}{\sqrt{5-(4+4u+u^2)}} = \int \frac{u\,du}{\sqrt{5}\text{-}(2+u)^2}$$

$$Sea\!: v = 2+u \quad dv = du \quad u = v\text{-}2$$

$= \int \frac{(v\text{-}2)dv}{\sqrt{5-(4+4u+u^2)}} = \int \frac{vdv}{\sqrt{5-v^2}} \text{-}2 \int \frac{dv}{\sqrt{5-v^2}}$




$v = \sqrt{5}\, Sen\theta \qquad dv = \sqrt{5}\, Cos\theta\, d\theta$

$= \int \frac{\sqrt{5}Sen\theta\, \sqrt{5}Cos\theta\, d\theta}{\sqrt{5 - 5Sen^2\theta}} \text{-}2 \int \frac{\sqrt{5}Cos\theta\, d\theta}{\sqrt{5 - 5Sen^2\theta}}$

$= \int \frac{5Sen\theta\, Cos\theta\, d\theta}{\sqrt{5(1 - Sen^2\theta)}} \text{-}2 \int \frac{\sqrt{5}Cos\theta\, d\theta}{\sqrt{5(1 - Sen^2\theta)}}$

$= \frac{5}{\sqrt{5}} \int \frac{Sen\theta\, Cos\theta\, d\theta}{Cos\theta} \text{-}2 \int d\theta = \frac{5}{\sqrt{5}}(\text{-}Cos\theta)\text{-}2\theta + C$

$= \text{-}\frac{5}{\sqrt{5}} \quad \frac{\sqrt{5-v^2}}{\sqrt{5}} \text{-}2\; arc\; Sen\; \frac{v}{\sqrt{5}}$

$= \text{-}\sqrt{5 - 2 + u}\text{-}2\; arc\; Sen\left(\frac{2+u}{\sqrt{5}}\right)$

$= \text{-}\sqrt{3 + lnx}\text{-}2\; arc\; Sen\left(\frac{2 + lnx}{\sqrt{5}}\right) + C$

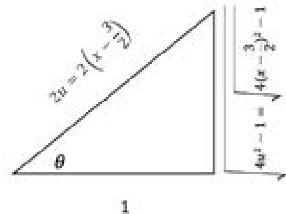
## Ejercicio 15

$$\int \frac{\boldsymbol{dx}}{(\boldsymbol{x}\text{-}\mathbf{1})\sqrt{\boldsymbol{x}^2\text{-}\mathbf{3}\boldsymbol{x} + \mathbf{2}}}$$

$= \int \frac{dx}{(x\text{-}1)\sqrt{\left(x^2\text{-}3x + \frac{9}{4}\right)\text{-}\frac{9}{4} + 2}} = \int \frac{dx}{(x\text{-}1)\sqrt{\left(x\text{-}\frac{3}{2}\right)^2 \text{-}\frac{1}{4}}}$

$Sea\!: \; u = x\text{-}\frac{3}{2} \rightarrow du = dx \rightarrow x = u + \frac{3}{2}$

$\int \frac{du}{(u + \frac{3}{2}\text{-}1)\sqrt{u^2\text{-}(\frac{1}{2})^2}} = \int \frac{du}{\left(u + \frac{1}{2}\right)\sqrt{u^2\text{-}(\frac{1}{2})^2}}$



$$Sea\colon\ u = \frac{1}{2}Sec\theta \rightarrow du = \frac{1}{2}Sec\theta\ tg\theta\ d\theta$$

$$\int \frac{\frac{1}{2}Sec\theta\ tg\theta\ d\theta}{\left(\frac{1}{2}Sec\theta + \frac{1}{2}\right)\sqrt{\left(\frac{1}{4}Sec^2\theta - \frac{1}{4}\right)}} = \frac{1}{2}\int \frac{Sec\theta\ tg\theta\ d\theta}{\frac{1}{2}(Sec\theta + 1)\frac{1}{2}tg\theta} = 2\int \frac{Sec\theta\ d\theta}{Sec\theta + 1}$$

$$2\int \frac{Sec\theta(Sec\theta - 1)d\theta}{(Sec\theta + 1)(Sec\theta - 1)} = 2\int \frac{Sec\theta(Sec\theta - 1)d\theta}{Sec^2\theta - 1}$$

$$= 2\int \frac{Sec^2\theta\ d\theta}{tg^2\theta} - 2\int \frac{Sec\theta\ d\theta}{tg^2\theta} = 2\int \frac{1}{Cos^2\theta}\ \frac{Cos^2\theta}{Sen^2\theta}d\theta - 2\int \frac{1}{Cos\theta}\ \frac{Cos^2\theta}{Sen^2\theta}d\theta$$

$$= 2\int Cosc^2\theta\ d\theta - 2\int \frac{Cos\theta}{Sen^2\theta}d\theta = 2\int Cos^2\theta\ d\theta - 2\int \frac{du}{u^2}$$

$$u = Sen\theta \qquad du = -Cos\theta\ d\theta$$

$$= 2(-Cotg\theta) + 2\frac{u^{-1}}{-1} + C = -2Cotg\theta + \frac{2}{Sen\theta} + C = -2Cotg\theta + \frac{2}{Sen\theta} + C$$

$$= -2Cotg\theta + 2Cos\theta + C = -2\frac{1}{\sqrt{4(x - \frac{3}{2})^2 - 1}} + 2\frac{2\left(x - \frac{3}{2}\right)}{\sqrt{4(x - \frac{3}{2})^2 - 1}} + C$$

# Solución de ejercicios propuestos sobre fracciones parciales

## Ejercicio 1

$$\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{x^2\text{-}4}}$$

$$= \int \frac{dx}{(x\text{-}2)(x+2)}$$

$$Caso 1: \quad \frac{1}{(x\text{-}2)(x+2)} = \frac{A}{x\text{-}2} + \frac{B}{x+2}$$

$$1 = A(x+2) + B(x\text{-}2)$$

$$Para\ x = -2 \rightarrow 1 = -2B\text{-}2B \qquad 1 = -4B \rightarrow B = \text{-}\tfrac{1}{4}$$

$$Para\ x = +2 \rightarrow 1 = 2A + 2A \qquad 1 = 4A \rightarrow A = \frac{1}{4}$$

$$\int \frac{dx}{x^2\text{-}4} = \int \frac{\frac{1}{4}dx}{x\text{-}2} + \int \frac{\text{-}\frac{1}{4}dx}{x+2} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x\text{-}2} \text{-} \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+2}$$

$$= \frac{1}{4} ln|x\text{-}2| \text{-} \frac{1}{4} ln|x+2| + C = \frac{1}{4}\left[ln\left|\frac{x\text{-}2}{x+2}\right| + C\right]$$

## Ejercicio 2

$$\int \frac{\boldsymbol{x+3}}{\boldsymbol{x^2\text{-}3x+2}}\boldsymbol{dx}$$

$$Caso 1 \quad \frac{x+3}{(x\text{-}2)(x\text{-}1)} = \frac{A}{x\text{-}2} + \frac{B}{x\text{-}1}$$

$x + 3 = A(x\text{-}1) + B(x\text{-}2) \quad Para\ x = 1 \quad 1 + 3 = -B \rightarrow B = -4$

$Para\ x = 2 \quad 2 + 3 = A \rightarrow A = 5$

$$\int \frac{x+3}{x^2\text{-}3x+2} dx = 5\int \frac{dx}{x\text{-}2} \text{-}4\int \frac{dx}{x\text{-}1} = 5ln|x\text{-}2|\text{-}4ln|x\text{-}1| + C$$

## Ejercicio 3

$$\int \frac{\mathbf{5x\ dx}}{\mathbf{2x^3 + 6x^2}}$$

$$Casos\ 1\ y\ 2 \quad \frac{5x}{x^2(2x+6)} = \frac{A}{2x+6} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2}$$

$5x = Ax^2 + Bx(2x+6) + C(2x+6)$

$= Ax^2 + 2Bx^2 + 6Bx + 2Cx + 6C$

$= (A + 2B)x^2 + (6B + 2C)x + 6C$

$A + 2B = 0 \qquad C = 0$

$6B + 2C = 5 \qquad B = \frac{5}{6}$

$6C = 0 \qquad A = \text{-}\frac{5}{3}$

$$\int \frac{5xdx}{2x^3 + 6x^2} = \text{-}\frac{5}{3}\int \frac{dx}{2x+6} + \frac{5}{6}\int \frac{dx}{x} \quad sea\ u = 2x + 6 \quad du = 2dx$$

$$\int \frac{5xdx}{2x^3 + 6x^2} = \text{-}\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{du}{u} + \frac{5}{6}\int \frac{dx}{x}$$

$$= \text{-}\frac{5}{6}ln|2x+6| + \frac{5}{6}lnx + C = \frac{5}{6}(lnx\text{-}ln|2x\text{-}6|) = \frac{5}{6}ln\left|\frac{x}{2x+6}\right|$$

Comprobación

$$\frac{5}{6}\frac{1}{\frac{x}{2x+6}}\cdot\frac{(2x+6)(1)\text{-}(x)(2)}{(2x+6)^2}=\frac{5}{6}\,\frac{1}{x}\,\frac{2x+6-2x}{2x+6}=\frac{5}{2x^2+6x}\cdot\frac{x}{x}=\frac{5x}{2x^3+6x^2}$$

## Ejercicio 4

$$\int\frac{\boldsymbol{x^4\text{-}x^3\text{-}x\text{-}1}}{\boldsymbol{x^3\text{-}x^2}}\boldsymbol{dx}$$

$x^4\text{-}x^3\text{-}$ $\qquad$ $\text{-}x\text{-}1$ $\quad \lfloor x^3\text{-}x^2$

$\underline{\text{-}x^4+x^3}$

\- $\quad$ -

$$\frac{x^3\text{-}x^3\text{-}x\text{-}1}{x^3\text{-}x^2}=x+\frac{\text{-}x\text{-}1}{x^3\text{-}x^2}=x\text{-}\frac{x+1}{x^3\text{-}x^2}=x\text{-}\frac{x+1}{x^2(x\text{-}1)}$$

$$\frac{x+1}{x^2(x\text{-}1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x\text{-}1}=\frac{Ax(x\text{-}1)+B(x\text{-}1)+Cx^2}{x^2(x\text{-}1)}=\frac{Ax^2\text{-}Ax+Bx\text{-}B+Cx^2}{x^2(x\text{-}1)}$$

$x+1=(A+C)x^2+(B\text{-}A)x\text{-}B \rightarrow A+C=0$

$B\text{-}A=1$

$\text{-}B=1 \qquad B=-1;\ A=-2;\ C=2$

$$\int\frac{x^4\text{-}x^3\text{-}x\text{-}1}{x^3\text{-}x^2}dx=\int xdx+\int\frac{dx}{x}\text{-}\int\frac{dx}{x^2}+2\int\frac{dx}{x\text{-}1}$$

$$=\frac{x^2}{2}+ln|x|\text{-}\frac{1}{x}+2ln|x\text{-}1|+C$$

## Ejercicio 5

$$\int\frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{x^2+7x+6}}$$

$$\frac{1}{x^2+7x+6}=\frac{1}{(x+6)(x+1)}=\frac{A}{x+6}+\frac{B}{x+1}$$

$1 = A(x+1) + B(x+6) \qquad Para: x = -1 \quad 1 = 5B \rightarrow B = \frac{1}{5}$

$Para: x = -6 \quad 1 = -5A \rightarrow A = -\frac{1}{5}$

$$\int \frac{dx}{x^2+7x+6} = -\frac{1}{5}\int \frac{dx}{x+6} + \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x+1} = -\frac{1}{5}ln|x+6| + \frac{1}{5}ln|x+1| + C$$

$$= \frac{1}{5}ln\left|\frac{x+1}{x+6}\right| + C$$

## Ejercicio 6

$$\int \frac{\boldsymbol{x+3}}{\boldsymbol{x^2-4x+4}}\boldsymbol{dx}$$

$$\frac{x+3}{x^2-4x+4} = \frac{x+3}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2}$$

$Para: \ x = 2 \quad 2+3 = B \rightarrow B = 5$

$Para: \ x = 0 \quad 3 = -2A + B$

$3 = -2A + 5 \quad A = 1$

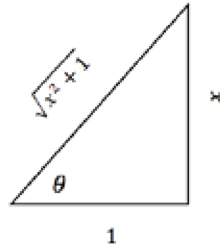
$$\int \frac{x+3}{x^2-4x+4}dx = \int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{5dx}{(x-2)^2} = ln|x-2| - \frac{5}{x-2} + C$$

Comprobación

$$\frac{1}{x-2} - \frac{(x-2)(0)-5(1)}{(x-2)^2} = \frac{x-2+5}{(x-2)^2} = \frac{x+3}{(x-2)^2} = \frac{x+3}{x^2-4x+4}$$

## Ejercicio 7

$$\int \frac{\boldsymbol{x^4 dx}}{\boldsymbol{x^4+2x^2+1}}$$




| | |
|---|---|
| $x^4$ | $\lvert x^4+2x^2+1$ |
| $-x^4-2x^2-1$ | $1$ |
| $- \quad -2x^2-1$ | |

$$\int \frac{x^4dx}{x^4+2x^2+1} = \int \left[1 - \frac{2x^2+1}{x^4+2x^2+1}\right] dx$$

$$\int \frac{2x^2+1}{x^4+2x^2+1} dx = \frac{2x^2+1}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

$$2x^2+1 = (Ax+B)(x^2+1) + (Cx+D)$$

$$2x^2+1 = Ax^3+Ax+Bx^2+B+Cx+D \rightarrow\ Ax^3+Bx^2+(A+C)x+B+D$$

$$A=0; B=2; A+C=0 \quad \rightarrow \quad C=0;\ \ B+D=1 \quad \rightarrow \quad D=-1$$

$$\int \frac{x^4dx}{x^4+2x^2+1} = \int dx \text{-} \int \frac{0x+2}{x^2+1} \text{-} \int \frac{0x\text{-}1}{(x^2+1)^2} dx$$

$$= \int dx \text{-}2 \int \frac{dx}{(x^2+1)} \text{-} \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = x\text{-}2arc\ tg(x)\text{-} \int \frac{dx}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^4}$$

$$\int \frac{dx}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^4} \qquad x = 1tg\theta \qquad dx = Sec^2\theta\ d\theta$$

$$\int \frac{Sec^2\theta\ d\theta}{\sqrt{(tg^2\theta+1)^4}} = \int \frac{Sec^2\theta\ d\theta}{(\sqrt{Sec^2\theta})^4} = \int \frac{Sec^2\theta\ d\theta}{Sec^4\theta} = \int \frac{d\theta}{Sec^2\theta}$$

$$\int Cos^2\theta\ d\ \theta = \frac{1}{2}\int (1+Cos2\theta)d\theta = \frac{1}{2}\theta + \frac{Sen2\theta}{4} = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}Sen\theta\ Cos\theta$$

$$= \frac{1}{2}arc\ tgx + Sen\theta\ Cos\theta = \frac{1}{2}arc\ tg\theta + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\int \frac{x^4dx}{x^4+2x^2+1} = x\text{-}2arc\ tgx\text{-}\frac{1}{2}arc\ tgx\text{-}\frac{x}{x^2+1} + C$$

$$= x\text{-}\frac{3}{2}arc\ tgx\text{-}\frac{x}{2(x^2+1)} + C$$

## Ejercicio 8

$$\int \frac{\mathbf{2x+1}}{(\mathbf{x}\text{-}\mathbf{1})^2}\,\mathbf{dx}$$

$$\frac{2x+1}{(x\text{-}1)^2}=\frac{A}{x\text{-}1}+\frac{B}{(x\text{-}1)^2}=\frac{A(x\text{-}1)+B}{(x\text{-}1)^2}$$

$$2x+1=Ax\text{-}A+B \rightarrow A=2; \quad B\text{-}A=1 \quad B=3$$

$$\int \frac{2x+1}{(x\text{-}1)^2}dx=\int \frac{2}{x\text{-}1}dx+\int \frac{3}{(x\text{-}1)^2}dx=2ln|x\text{-}1|\text{-}\frac{3}{x\text{-}1}+C$$

## Ejercicio 9

$$\int \frac{\mathbf{5x^2\text{-}42x+35}}{(\mathbf{6x+5})(\mathbf{x}\text{-}\mathbf{3})^2}\,\mathbf{dx}$$

$$\frac{5x^2\text{-}42x+35}{(6x+5)(x\text{-}3)^2}=\frac{A}{6x+5}+\frac{B}{x\text{-}3}+\frac{C}{(x\text{-}3)^2}$$

$$5x^2\text{-}42x+35=A(x\text{-}3)^2+B(6x+5)(x\text{-}3)+C(6x+5)$$

$Para\ \ x=3$

$$5(3)^2\text{-}42(3)+35=A(0)+B(6x+5)(0)+C(6(3)+5)$$

$$45-126++35=23C \rightarrow C=-2$$

$Para\ \ x=\text{-}\frac{5}{6}$

$$5(-\frac{5}{6})^2\text{-}42\left(\text{-}\frac{5}{6}\right)+35=A(\text{-}\frac{5}{6}\text{-}3)^2$$

$$\frac{2645}{36}=A\left(\frac{529}{36}\right)\rightarrow A=5$$

$Para\ \ x=0$

$$5(0)^2\text{-}42(0)+35=A(-3)^2+B(5)(\text{-}3)+C(5)$$

$35 = 9A\text{-}15B + 5C \quad Reemplazamos\ A\ y\ C$

$35 = 45 - 15B + (\text{-}10) \qquad 15B = 45 - 10 - 35 \rightarrow B = 0$

$$\int \frac{5x^2\text{-}42x + 35}{(6x + 5)(x\text{-}3)^2} dx = 5 \int \frac{dx}{6x + 5} \text{-}2 \int \frac{dx}{(x\text{-}3)^2}$$

$Sea\text{:} \quad u = 6x + 5 \quad du = 6dx \quad dx = \frac{du}{6} \qquad v = x\text{-}3 \quad dv = dx$

$$= 5 \int \frac{du/6}{u} \text{-}2 \int \frac{dv}{v^2} = \frac{5}{6} ln|6x + 5| + \frac{2}{x\text{-}3} + C$$

## Ejercicio 10

$$\int \boldsymbol{\frac{x^3 + x^2 + x + 2}{x^4 + 3x^2 + 2} dx}$$

$$\frac{x^3 + x^2 + x + 2}{x^4 + 3x^2 + 2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2}$$

$x^3 + x^2 + x + 2 = (Ax + B)(x^2 + 2) + (Cx + D)(x^2 + 1)$

$= Ax^3 + 2Ax + Bx^2 + 2B + Cx^3 + Cx + Dx^2 + D$

$= (A + C)x^3 + (B + D)x^2 + (2A + C)x + 2B + D$

$A + C = 1; \;\; B + +D = 1; \;\; 2A + C = 1; \;\; 2B + D = 2$

$A = 0; \;\; B = 1; \;\; C = 1; \;\; D = 0$

$$\int \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{x^4 + 3x^2 + 2} dx = \int \frac{dx}{x^2 + 1} + \int \frac{xdx}{x^2 + 2} = arc\ tgx + \frac{1}{2} ln|x^2 + 2| + C$$

## Ejercicio 11

$$\int \boldsymbol{\frac{6x^2\text{-}3x + 1}{(4x + 1)(x^2 + 1)} dx}$$

$$\frac{6x^2\text{-}3x+1}{(4x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{4x+1}+\frac{B}{x^2+1}$$

$$6x^2\text{-}3x+1=A(x^2+1)+(Bx+c)(4x+1)$$

$$Escogiendo:\ \ x=\text{-}\frac{1}{4};\ \ \ x=0;\ \ x=1$$

$$Para:\ x=\text{-}\frac{1}{4}$$

$$6(\text{-}\frac{1}{4})^2\text{-}3(\text{-}\frac{1}{4})+1=A\left(\left(\text{-}\frac{1}{4}\right)^2+1\right)+\left[B\left(\text{-}\frac{1}{4}\right)+C\right]\left[4\left(\text{-}\frac{1}{4}\right)+1\right]$$

$$6\left(\frac{1}{16}\right)+\frac{3}{4}+1=A\left(\frac{1}{16}\right)+Ax+\left[B\left(\text{-}\frac{1}{4}\right)+C\right](0)$$

$$\frac{17}{8}=\frac{17}{16}A\rightarrow A=2$$

$$Para:\ x=0$$

$$6(0)^2\text{-}3(0)+1=A((0)^2+1)+[B(0)+C][4(0)+1]\rightarrow 1=A+C\rightarrow C=-1$$

$$Para:\ x=1$$

$$6(1)^2\text{-}3(1)+1=A((1)^2+1)+[B(1)+C][4(1)+1]\rightarrow 4=2A+(B\text{-}1)(5)$$

$$4=2(2)\text{-}5B\text{-}5$$

$$B=1$$

$$\int\frac{6x^2\text{-}3x+1}{(4x+1)(x^2+1)}dx=\int\frac{2xdx}{4x+1}+\int\frac{x\text{-}1}{x^2+1}dx$$

$$u=4x+1\ \rightarrow\ du=4dx\ \rightarrow\ \ dx=\frac{du}{4}$$

$$=\int\frac{2xdx}{4x+1}+\int\frac{xdx}{x^2+1}\text{-}\int\frac{dx}{x^2+1}$$

$$v=x^2+1\ \rightarrow\ \ dv=2xdx\ \ \ \rightarrow\ xdx=\frac{dv}{2}$$

$$=\frac{1}{2}ln|4x+1|+\frac{1}{2}ln|x^2+1|\text{-}arc\ tgx+C$$

## Ejercicio 12

$$\int\frac{\boldsymbol{6x^2\text{-}15x+22}}{\boldsymbol{(x+3)(x^2+2)^2}}\boldsymbol{dx}$$

$$\int\frac{6x^2\text{-}15x+22}{(x+3)(x^2+2)^2}dx=\frac{A}{x+3}+\frac{Bx+C}{x^2+2}+\frac{Dx+E}{(x^2+2)^2}$$

$6x^2\text{-}15x+22=A(x^2+2)^2+(Bx+C)(x+3)(x^2+2)+(Dx+E)(x+3)$

$Para:\ \ x=0;\ x=-3;\ \ x=1;\ \ x=-1;\ \ x=2$

$x=0;$

$6(0)^2\text{-}15(0)+22=A(0^2+2)^2\text{-}[B(0)+C](0+3)(0^2+2)+(D(0)+E)(0+3$

$22=4A+C(3)(2)+E(3)\rightarrow 4A+6C+3E=22$

$x=-3$

$6(-3)^2\text{-}15(-3)+22=A((\text{-}3)^2+2)^2+[B(\text{-}3)+C](0)[(\text{-}3)^2+2]+[D(\text{-}3)+E](0)$

$54+45+22=121A\rightarrow A=1$

$x=1$

$6-15+22=A(1^2+2)^2+[B(1)+C][(1+3)(1^2+2)]+[D(1)+E](1+3)$

$13=9A+(B+C)(12)+(D+E)(4)$

$13=9A+12B+12C+4D+4E$

$x=-1$

$6(-1)^2\text{-}15(-1)+22=A((\text{-}1)^2+2)^2+[B(\text{-}1)+C][(-1)+3)][(\text{-}1)^2+2]$

$+[D(\text{-}1)+E][(-1)+3)]$

$43=9A\text{-}6B+6C\text{-}2D+2E$

$x=2$

$6(2)^2\text{-}15(2) + 22 = A((2)^2 + 2)^2 + (2B + C)(2 + 3)(4 + 2) + (2D + E)(2 + 3)$

$24 - 30 + 22 = 36A + (2B + C)(5)(6) + (2D + E)5$

$16 = 36A + 60B + 30C + 10D + 5E$

$Sistema\ de\ Ecuaciones$:

$4A + +6C + 3E = 22$

$A = 1$

$9A + 12B + 12C + 4D + 4E = 13$

$9A\text{-}6B + 6C\text{-}2D + 2E = -1$

$36A + 60B + 30C + 10D + 5E = 16$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se tiene los siguientes resultados:

$A = 1;\ B = -1;\ C = 3;\ D = -5;\ E = 0$

$$\int \frac{6x^2\text{-}15x + 22}{(x + 3)(x^2 + 2)^2} dx = \int \frac{dx}{x + 3} + \int \frac{\text{-}x + 3}{x^2 + 2} dx + \int \frac{\text{-}5x\ dx}{(x^2 + 2)^2}$$

$$= \int \frac{dx}{x + 3} \text{-} \int \frac{x\ dx}{x^2 + 2} + \int \frac{3dx}{x^2 + 2} \text{-} \int \frac{5x\ dx}{(x^2 + 2)^2}$$

$Sea$: $u = x + 3 \rightarrow du = dx \rightarrow v = x^2 + 2 \rightarrow dv = 2xdx \rightarrow xdx = \frac{dv}{2} \rightarrow$

$w = x^2 + 2 \rightarrow dw = 2xdx \rightarrow xdx = \frac{dw}{2}$

$$= ln|x + 3|\text{-}\frac{1}{2} ln|x^2 + 2| + \frac{3}{\sqrt{2}} arc\ tg \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{5}{2(x^2 + 2)} + C$$

## Ejercicio 13

$$\int \frac{\boldsymbol{x^4 dx}}{\boldsymbol{x^4 + 2x^2 + 1}}$$

$x^4$ $\quad$ $\underline{|x^4 + 2x^2 + 1}$

$\underline{-x^4}$ $\quad$ 1

$-2x^2-1$

$$\int \frac{x^4dx}{x^4+2x^2+1} = \int dx - \int \frac{2x^2+1}{x^4+2x^2+1}$$

$$\frac{2x^2+1}{x^4+2x^2+1} = \frac{2x^2+1}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

$2x^2 + 1 = (Ax + B)(x^2 + 1) + (Cx + D)$

$Seleccionando\ 4\ valores\ de\ x\colon\ x = 0; x = 1;\ \ x = -1;\ \ x = 2$

$Para\colon x = 0$

$1 = B(1)^2 + D \qquad B + D = 1$

$Para\colon x = 1$

$2 + 1 = (A + B)(1^2 + 1) + (C + D)$

$3 = 2A + 2B + C + D \qquad 2\,A + 2B + C + D = 3$

$Para\colon x = -1$

$3 = (-A + B)(2) + (-C + D) \qquad -2A + 2B - C + D = 3$

$Para\colon x = 2$

$9 = (2A + B)(2^2 + 1) + (2C + D) \qquad 10A + 5B + 2C + D = 9$

$Usando\ Gauss\ Jordan\colon A = 0;\ \ B = 2;\ \ C = 0;\ \ D = -1$

$$\int \frac{x^4dx}{x^4+2x^2+1} = \int dx - \int \frac{2dx}{x^2+1} - \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = x - 2\,arc\,tgx - \int \frac{1}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} = \frac{(Ax+B)\left(x^2+1\right)+Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

$x = 0 \to 1 = B(1) + D \qquad B + D = 1$

$x = 1 \to 1 = (A + B)(2) + C + D \qquad 2A + 2B + C + D = 1$

$x = -1 \rightarrow 1 = (\text{-}A + B)(2)\text{-}C + D \qquad -2A + 2B\text{-}C + D = 1$

$x = 2 \rightarrow 1 = (2A + B)(5) + 2C + D \qquad 10A + 5B + 2C + D = 1$

$Usando\ Gauss\ Jordan: A = 0;\ \ B = 0;\ \ C = 0;\ \ D = 1$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} \quad y\ se\ llego\ a\ la\ misma\ expresión\ (no\ es\ solución)$$

## *Otro método*

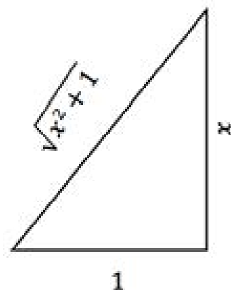
$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{dx}{(\sqrt{x^2+1})^4} \qquad Sea: x = tg\theta \qquad dx = Sec^2\theta\ d\theta$$

$$= \int \frac{Sec^2\theta\ d\theta}{(\sqrt{tg^2\theta+1})^4} = \int \frac{Sec^2\theta\ d\theta}{(\sqrt{Sec^2\theta})^4} = \int \frac{Sec^2\theta\ d\theta}{Sec^4\theta} = \int \frac{d\theta}{Sec^2\theta}$$

$$= \int Cos^2\theta\ d\ \theta = \frac{1}{2}\int (1 + 2Cos2\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int d\theta + \frac{2}{2}\ \frac{Sen2\theta}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}Sen2\theta = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}Sen\theta\ Cos\theta$$

$$= \frac{1}{2}arc\ tgx + \frac{1}{2}x\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$




## *Solución total*

$x\text{-}2arc\ tgx + \frac{1}{2}arc\ tgx\text{-}\frac{1}{2}\ \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$$\int \frac{x^4 dx}{x^4 + 2x^2 + 1} = x\text{-}\frac{3}{2}arc\ tgx + \frac{1}{2}\ \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C$$

# Ejercicio 14

$$\int \frac{\boldsymbol{x^3 + 7x^2\text{-}5x + 5}}{\boldsymbol{(x\text{-}1)^2(x+1)^3}}\boldsymbol{dx}$$

$$\frac{x^3+7x^2\text{-}5x+5}{(x\text{-}1)^2(x+1)^3}=\frac{A}{x\text{-}1}+\frac{B}{(x\text{-}1)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{(x\text{-}1)^2}+\frac{E}{(x+1)^3}$$

$x^3+7x^2\text{-}5x+5=A(x\text{-}1)(x+1)^3+B(x+1)^3+C(x\text{-}1)^2(x+1)^2$

$+D(x\text{-}1)^2(x+1)+E(x\text{-}1)^2$

$Para: x=1;\ \ x=-1;\ \ x=0;\ \ x=2;\ \ x=3$

$x=1$

$1^3+7(1)^2\text{-}5(1)+5=A(0)(2)^3+B(2)^3+C(0)^2(2)^2$

$+D(0)^2(x+1)+E(0)^2$

$8=8B\rightarrow B=1$

$x=-1$

$(-1)^3+7(-1)^2\text{-}5(-1)+5=A(-2)(0)^3+B(0)^3+C(-2)^2(0)^2$

$+D(-2)^2(0)+E(-2)^2$

$\text{-}1+7+5+5=4E\qquad 16=4E\qquad E=4$

$x=0$

$(0)^3+7(0)^2\text{-}5(0)+5=A(-1)(1)^3+B(1)^3+C(-1)^2(1)^2$

$+D(-1)^2(1)+E(-1)^2$

$5=-A+B+C+D+E\qquad \text{-}A+B+C+D+E=5$

$x=2$

$(2)^3+7(2)^2\text{-}5(2)+5=A(2-1)(2+1)^3+B(2+1)^3+C(2-1)^2(2+1)^2$

$+D(2-1)^2(2+1)+E(2-1)^2$

$8+28-10+5=27A+27B+9C+3D+E$

$=27A+27B+9C+3D+E=31$

$x=3$

$(3)^3+7(3)^2\text{-}5(3)+5=A(2)(4)^3+B(4)^3+C(2)^2(4)^2$

$+D(2)^2(4)+E(2)^2$

$128A + 64B + 32C + 16D + 4E = 80$

$Usando\ Gauss\ Jordan: A = 0; B = 1; C = 0; D = 0; E = 4$

$$\int \frac{x^3 + 7x^2 - 5x + 5}{(x-1)^2(x+1)^3} = \int \frac{dx}{(x-1)^2} + 4\int \frac{dx}{(x+1)^3}$$

$u = x-1 \quad du = dx \qquad v = x + 1 \quad dv = dx$

$$= \int \frac{du}{u^2} + 4\int \frac{dv}{v^3} = \frac{u^{-1}}{-1} + 4\frac{v^{-2}}{-2} = -\frac{1}{u} - 2\frac{1}{v^2} = -\frac{1}{x-1} - \frac{2}{(x+1)^2} + C$$

## Ejercicio 15

$$\int \boldsymbol{\frac{7x + 1}{x^3 + 6x^2 + 12x + 8} dx}$$

$$\frac{7x + 1}{x^3 + 6x^2 + 12x + 8} = \frac{7x + 1}{(x + 2)^3} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{(x + 2)^2} + \frac{C}{(x + 2)^3}$$

$7x + 1 = A(x + 2)^2 + B(x + 2) + C$

$x = -2$

$7(-2) + 1 = A(-2 + 2)^2 + B(-2 + 2) + C$

$-13 = C \quad \rightarrow \quad C = -13$

$x = 0$

$7(0) + 1 = A(0 + 2)^2 + B(0 + 2) + C \rightarrow 1 = 4A + 2B + C$

$1 = 4A + 2B - 13 \quad \rightarrow 14 = 4A + 2B \rightarrow 2A + B = 7$

$x = 1$

$7(1) + 1 = A(1 + 2)^2 + B(1 + 2) + C$

$8 = 9A + 3B + C \rightarrow 9A + 3B = 21 \rightarrow -3A - B = -7$

$2A + B = 7 \qquad A = 0; \ B = 7; \ C = -13$

$\underline{-3A - B = -7}$

$-A \quad = 0$

$$\int \frac{7x + 1}{x^3 + 6x^2 + 12x + 8} dx = 7 \int \frac{dx}{(x+2)^2} \text{-}13 \int \frac{dx}{(x+2)^3}$$

$u = x + 2 \rightarrow du = dx$ $\qquad$ $dv = x + 2 \rightarrow dv = dx$

$$= 7 \int \frac{du}{u^2} \text{-}13 \int \frac{dv}{v^3} = 7\frac{u^{-1}}{-1} \text{-}13\frac{v^{-2}}{-2} = -\frac{7}{x+2} + \frac{13}{2(x+2)^2} + C$$

## *Comprobación*

$$-\left(\frac{(x+2)(0)\text{-}7(1)}{(x+2)^2}\right) + \left(\frac{(x+2)^2(0)\text{-}\frac{13}{2}(2)(x+2)}{(x+2)^4}\right)$$

$$= \frac{\mathbf{7}}{(x+2)^2} - \frac{13(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{7}{(x+2)^2} - \frac{13}{(x+2)^3} = \frac{7(x+2)\text{-}13}{(x+2)^3} = \frac{7x+1}{(x+2)^3}$$

# Solución ejercicios propuestos de Integración de Expresiones Cuadráticas

## Ejercicio 1

$$\int \frac{\mathbf{6x\text{-}5}}{\sqrt{\mathbf{3x^2+4x+1}}}\mathbf{dx}$$

Tratar de conseguir en el numerador una expresión que tenga *6x+4*

$$\int \frac{6x\text{-}5}{\sqrt{3x^2+4x+1}}dx = \int \frac{6x\text{-}5+4-4}{\sqrt{3x^2+4x+1}}dx = \int \frac{6x+4-9}{\sqrt{3x^2+4x+1}}dx$$

$$= \int \frac{6x+4}{\sqrt{3x^2+4x+1}}dx\text{-}9\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+4x+1}}$$

### *1era integral*

$$\int \frac{6x+4}{\sqrt{3x^2+4x+1}}dx \quad Sea{:}\, u = 3x^2+4x+1 \rightarrow du = 6x+4$$

$$= \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int u^{\text{-}1/2}\,du = \frac{u^{1/2}}{1/2} = 2\sqrt{u} = 2\sqrt{3x^2+4x+1}+C$$

### *2da integral*

$$9\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+4x+1}}$$

$$3x^2+4x+1=3\left(x^2+\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}\right)=3\left[x^2+\frac{4}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\right]$$

$$=3\left[\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{9}+\frac{1}{3}\right]=3\left[\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{9}\right]$$

$$=9\int\frac{dx}{\sqrt{3\left[\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{9}\right]}}=9\int\frac{dx}{\sqrt{3}\sqrt{\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{9}}}=\frac{9}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{9}}}$$

$$Sea: v=x+\frac{2}{3}\rightarrow dv=dx$$

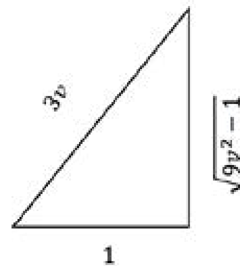
$$=\frac{9}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{v^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2}} \qquad Sea: v=\frac{1}{3}Sect\rightarrow dv=\frac{1}{3}Sect\ tgt\ dt$$

$$=\frac{9}{\sqrt{3}}\int\frac{\frac{1}{3}Sect\ tgt\ dt}{\sqrt{\frac{1}{9}Sec^2t-\frac{1}{9}}}=\frac{9}{\sqrt{3}}\int\frac{\frac{1}{3}Sect\ tgt\ dt}{\sqrt{\frac{1}{9}(Sec^2t-1)}}=\frac{9}{\sqrt{3}}\int\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}\ \frac{Sect\ tgt\ dt}{tgt}$$

$$=\frac{9}{\sqrt{3}}\int Sect\ dt=\frac{9}{\sqrt{3}}ln|Sect-tgt|+C$$

$$=\frac{9}{\sqrt{3}}\,ln\left|3v+\frac{\sqrt{9v^2-1}}{1}\right|+C$$

$$=\frac{9\sqrt{3}}{\mathbf{3}}\,ln\left|3\left(x+\frac{2}{3}\right)+\sqrt{9\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-1}\right|+C$$

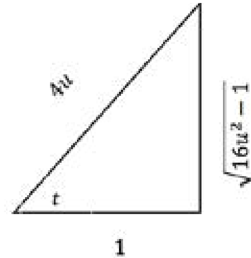



$$=3\sqrt{3}ln\left|3x+2+\sqrt{9\left(x^2+2\frac{2}{3}x-\frac{4}{9}\right)-1}\right|+C$$

$$= 3\sqrt{3}ln\left|3x + 2 + \sqrt{9x^2 + 12x + 3}\right| + C$$

$$Respuesta\ Total: 2\sqrt{3x^2 + 4x + 1} + 3\sqrt{3}\ ln\left|3x + 2 + \sqrt{9x^2 + 12x + 3}\right| + C$$

## Ejercicio 2




$$\textbf{2.-} \int \frac{dx}{2x^2 + 3x + 1}$$

$$= \int \frac{dx}{\frac{2}{2}(2x^2 + 3x + 1)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2 + \frac{3}{2}x + \left(\frac{3/2}{2}\right)^2 - \left(\frac{3/2}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2 + \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{16}} = \quad Sea: u = x + \frac{3}{4} \rightarrow du = dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} \qquad Sea: u = \frac{1}{4}Sect \rightarrow du = \frac{1}{4}Sect\ tgt\ dt$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{4}Sect\ tgt\ dt}{\frac{1}{16}Sec^2t - \frac{1}{16}} = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{4}Sect\ tgt\ dt}{\frac{1}{16}(Sec^2t - 1)} = 2\int \frac{Sect\ tgt\ dt}{tg^2t}$$

$$= 2\int \frac{Sect\ dt}{tg\ t} = 2\int \frac{1}{Cost}\cdot\frac{Cost}{Sent}dt = 2\int \frac{dt}{Sent} = 2\int Cost\ dt$$

$$= 2ln|Cosc\ t - Cotg\ t| + C$$

$$= 2ln\left|\frac{4u}{\sqrt{16u^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{16u^2-1}}\right| + C$$

$$= 2ln\left|\frac{4u\text{-}1}{\sqrt{16u^2\text{-}1}}\right| + C = 2ln\left|\frac{4u\text{-}1}{\sqrt{(4u+1)(4u\text{-}1)}}\right| + C = 2ln\left|\frac{\sqrt{4u\text{-}1}}{\sqrt{4u+1}}\right| + C$$

$$= 2ln\left|\left(\frac{4u\text{-}1}{4u+1}\right)^{1/2}\right| + C = 2\cdot\frac{1}{2}ln\left|\frac{4u\text{-}1}{4u+1}\right| + C = ln\left|\frac{4\left(x+\frac{3}{4}\right)\text{-}1}{4\left(x+\frac{3}{4}\right)+1}\right| + C$$

$$= ln\left|\frac{4x+3-1}{4x+3+1}\right| + C = ln\left|\frac{4x+2}{4x+4}\right| + C = ln\left|\frac{2(2x+1)}{4(x\text{-}1)}\right| + C = ln\left|\frac{\frac{2x+1}{x+1}}{2}\right| + C$$

$$= ln\left|\frac{2x+1}{x+1}\right| \text{-}ln2 + C = ln\left|\frac{2x+1}{x+1}\right| + C$$

## Ejercicio 3

$$\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\sqrt{\mathbf{15\text{-}4}\boldsymbol{x}\text{-}\mathbf{4}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}}$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{15-(4x^2+4x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{15-(4x^2+4x+1)+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{16-(2x+1)^2}}$$

$Sea: u = 2x + 1 \rightarrow du = 2dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{16-x^2}} = \frac{1}{2}arc\ Sen\left(\frac{u}{4}\right) + C = \frac{1}{2}arc\ Sen\left(\frac{2x+1}{4}\right) + C$$

## Ejercicio 4

$$\int \sqrt{\mathbf{5\text{-}4}\boldsymbol{x}\text{-}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}\ \boldsymbol{dx}$$

$$= \int \sqrt{5(x^2+4x)}\,dx = \int \sqrt{5-(x^2+4x+4)+4}\ dx = \int \sqrt{9-(x+2)^2}\,dx$$

$Sea: u = x + 2 \rightarrow du = dx$

$$= \int \sqrt{9-u^2}\,du \qquad u = 3Sent \quad du = 3Cost\ dt$$

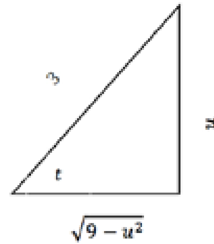
$$= \int \sqrt{9 - 9Sen^2t}\ (3Cost\ dt) = \int \sqrt{9(1 - Sen^2t)}\,(3Cost\ dt)$$

$$= \int \sqrt{9Cos^2t}\ \ 3Cost\ dt = 9\int Cos^2t\ dt = 9\int \frac{1}{2}(1 + \cos 2t\ dt)$$

$$= \frac{9}{2}\left[\int dt + \int Cos2t\ dt\right] = \frac{9}{2}\left(t + \frac{Sen\ 2t}{2}\right) + C$$

$$= \frac{9}{2}\left(t + \frac{2Sent\ \ Cost}{2}\right) + C$$

$$= \frac{9}{2}\left(arcSen\frac{u}{3} + \frac{u}{3}\ \ \frac{\sqrt{9 - u^2}}{3}\right) + C$$




$$= \frac{9}{2}\left[arc\ Sen\ \frac{x + 2}{3} + \frac{(x + 2)\sqrt{9 - (x + 2)^2}}{9}\right] + C$$

## Ejercicio 5

$$\int \frac{\boldsymbol{lnx\ dx}}{\boldsymbol{x\sqrt{1\text{-}4lnx\text{-}ln^2x}}}$$

$$Sea: u = lnx \rightarrow du = \frac{1}{x}dx \rightarrow dx = xdu$$

$$= \int \frac{ux\ dx}{x\sqrt{1 - 4u\text{-}u^2}} = \int \frac{udu}{\sqrt{1 - (u^2 + 4u)}} = \int \frac{udu}{\sqrt{1 - (u^2 + 4u + 4) + 4}}$$

$$= \int \frac{udu}{\sqrt{5 - (u + 2)^2}} = \qquad Sea: v = u + 2 \rightarrow u = v\text{-}2 \rightarrow dv = du$$

$$= \int \frac{(v\text{-}2)dv}{\sqrt{5 - v^2}} = \int \frac{vdv}{\sqrt{5 - v^2}}\text{-}2\int \frac{dv}{\sqrt{5 - v^2}}$$

## *1era integral*

$$\int \frac{vdv}{\sqrt{5-v^2}} = \quad Sea: w = 5 - v^2 \rightarrow dw = -2vdv \rightarrow vdv = -\frac{dw}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dw}{\sqrt{w}} = -\frac{1}{2}\int w^{-1/2} dw = -\frac{1}{2}\ \frac{w^{1/2}}{1/2} = -w^{1/2} = -\sqrt{5-v^2} = -\sqrt{5-(u+2)^2}$$

$$= -\sqrt{5-(lnx+2)^2} + C$$

## *2da integral*

$$= 2\int \frac{dv}{\sqrt{5-v^2}} = 2arc\ Sen\left(\frac{v}{\sqrt{5}}\right) = 2arc\ Sen\left(\frac{u+2}{\sqrt{5}}\right) = 2arc\ Sen\left(\frac{lnx+2}{\sqrt{5}}\right) + C$$

*Respuesta final*

$$\int \frac{lnx\ dx}{x\sqrt{1-4lnx-ln^2x}} = -\sqrt{5-(lnx+2)^2} - 2arc\ Sen\left(\frac{lnx+2}{\sqrt{5}}\right) + C$$

# Solución a ejercicios propuestos sobre Sustituciones Diversas

## Ejercicio 1

$$\int \frac{\boldsymbol{x^2 dx}}{\sqrt[3]{\boldsymbol{1+2x}}}$$

Esta es una integral de la forma

$\sqrt[n]{au+b} \quad a=2; u=x; b=1; n=3$

Sustitución $1+2x=z^3 \rightarrow x=\frac{z^3\text{-}1}{2} \rightarrow dx=\frac{3}{2}z^2\,dz$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{1+2x}} = \int \left(\frac{z^3\text{-}1}{2}\right)^2 \frac{1}{\sqrt[3]{z^3}}\left(\frac{3}{2}z^2\,dz\right) = \frac{3}{8}\int \frac{(z^6\text{-}2z^3+1)z^2 dz}{z}$$

$$= \frac{3}{8}\int (z^7\text{-}2z^4+z)dz = \frac{3}{8}\left[\frac{z^8}{8}\text{-}2\frac{z^5}{5}+\frac{z^2}{2}\right]+C$$

Retornando a la variable original x.

$$\frac{3}{8}\left[\frac{1}{8}(1+2x)^{8/3}\text{-}\frac{2}{5}(1+2x)^{5/3}+\frac{1}{2}(1+2x)^{2/3}\right]+C$$

## Ejercicio 2

$$\int \frac{\boldsymbol{1\text{-}\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{\boldsymbol{x}}}\,\boldsymbol{dx}$$

La integral tiene dos raíces de la forma au+b. Para el denominador, la sustitución sería x=$z^2$ mientras para el denominador sería x=$z^3$.

Una sustitución válida para los dos casos sería:

$$z = \sqrt[6]{x} = x^{1/6} \rightarrow x = z^6 \quad dx = 6z^5 dz$$

$$\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx = \int \frac{1-z^3}{z^2} 6z^5 dz = \int (z^3 \text{-} z^6) dz = 6\frac{z^4}{4} \text{-} 6\frac{z^7}{7} + C$$

$$= \frac{3}{2}(x^{1/6})^2 \text{-} \frac{6}{7}(x^{1/6})^7 + C = \frac{3}{2}x^{2/3} \text{-} \frac{6}{7}x^{7/6} + C$$

## Ejercicio 3

$$\int \boldsymbol{x^2\sqrt{3x+4}\ dx}$$

$$Sea: 3x + 4 = z^2; x = \frac{z^2 \text{-} 4}{3}\ ; dx = \frac{1}{3} 2z\, dz$$

$$= \int \left(\frac{z^2 \text{-} 4}{3}\right)^2 z\frac{1}{3}2z\, dz = \frac{2}{27}\int z^2(z^4 \text{-} 8z^2 + 16)\, dz$$

$$= \frac{2}{27}\int (z^6 \text{-} 8z^4 + 16z^2) dz = \frac{2}{27}\left(\frac{z^7}{7} \text{-} 8\frac{z^5}{5} + 16\frac{z^3}{3}\right) + C$$

$$= \frac{2}{27}\left[\frac{(\sqrt{3x+4})^7}{7} \text{-} \frac{8}{5}(\sqrt{3x+4})^5 + \frac{16}{3}(\sqrt{3x+4})^3\right] + C$$

## Ejercicio 4

$$\int \boldsymbol{\sqrt{1 \text{-} e^x}\ dx}$$

$$Sea: u = e^x; du = e^x dx$$

$$= \int \sqrt{1-u}\ \frac{du}{e^x} = \int \sqrt{1-u}\ \frac{du}{u} = \int \frac{\sqrt{1-u}}{u}\ du$$

$$Sea: 1 - u = z^2 \rightarrow u = 1 - z^2 \rightarrow du = -2zdz$$

$$= \int \frac{z}{1 - z^2}(\text{-}2z)dz = -2\int \frac{z^2}{1 - z^2}dz$$

Dividiendo para convertir en fracción propia

$$= -2\int \left[\text{-}1 - \frac{1}{z^2\text{-}1}\right]dz = -2\left[\text{-}\int dz\text{-}\int \frac{dz}{z^2\text{-}1}\right] = -2\left[\text{-}z\text{-}\int \frac{dz}{(z\text{-}1)(z+1)}\right]$$

$$\int \frac{dz}{(z\text{-}1)(z+1)} = \frac{A}{z\text{-}1} + \frac{B}{z+1} = \frac{Az + A + Bz\text{-}B}{(z\text{-}1)(z+1)} = \frac{(A+B)z + A\text{-}B}{(z\text{-}1)(z+1)}$$

$A + B = 0$

$\underline{A\text{-}B = 1}$

$2A = 1 \rightarrow A = \frac{1}{2}; B = \text{-}\frac{1}{2}$

$$= 2Z + 2\int \frac{\frac{1}{2}dz}{z\text{-}1} + 2\int \frac{\text{-}\frac{1}{2}dz}{z+1} = 2z + ln|z\text{-}1|\text{-}ln|z+1| + C$$

$$= 2z + ln\left|\frac{z\text{-}1}{z\text{-}1}\right| \quad pero\ z = \sqrt{1-u}$$

$$= 2\sqrt{1-u} + ln\left|\frac{\sqrt{1-u}\text{-}1}{\sqrt{1-u}+1}\right| + C \quad pero\ u = e^x$$

$$= 2\sqrt{1-e^x} + ln\left|\frac{\sqrt{1-e^x}\text{-}1}{\sqrt{1-e^x}+1}\right| + C$$

## Ejercicio 5

$$\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{x\sqrt{1+x+x^2}}}$$

Sustitución recomendada $1 + x + x^2 = (z\text{-}x)^2$

$1 + x + x^2 = z^2\text{-}2zx + x^2 \rightarrow 2zx + x = z^2\text{-}1$

$$x(2z+1) = z^2\text{-}1 \qquad x = \frac{z^2\text{-}1}{2z+1}$$

$$dx = \frac{(2z+1)(2z)\text{-}(z^2\text{-}1)(2)}{(2z+1)^2}dz \qquad dx = \frac{4z^2+2z\text{-}2z^2+2}{(2z+1)^2} \qquad dz$$

$$= \frac{2z^2+2z+2}{(2z+1)^2}dz$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x+x^2}} = \int \frac{2\frac{z^2+z+1}{(2z+1)^2}dz}{\frac{z^2\text{-}1}{2z+1}(z\text{-}x)} = 2\int \frac{(z^2+z+1)dz}{(z^2\text{-}1)(2z+1)\left(z\text{-}\frac{z^2\text{-}1}{2z+1}\right)}$$

$$2\int \frac{(z^2+z+1)dz}{(z^2\text{-}1)(2z+1)\left(\frac{2z^2+z\text{-}z^2+1}{2z+1}\right)} = 2\int \frac{z^2+z+1}{(z^2\text{-}1)(z^2+z+1)}dz$$

$$2\int \frac{dz}{z^2\text{-}1} = 2\int \frac{dz}{(z+1)(z\text{-}1)}$$

$$\int \frac{dz}{(z+1)(z\text{-}1)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z\text{-}1} = \frac{Az\text{-}A+Bz+B}{(z+1)(z\text{-}1)} = \frac{(A+B)z+B\text{-}A}{(z+1)(z\text{-}1)}$$

$A + B = 0$

$\underline{B\text{-}A = 1}$

$2B = 1 \rightarrow B = \frac{1}{2}; A = \text{-}\frac{1}{2}$

$$\int \frac{dz}{(z+1)(z\text{-}1)} = \int \frac{\text{-}\frac{1}{2}dz}{z+1} + \int \frac{\frac{1}{2}dz}{z\text{-}1} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z\text{-}1}$$

$Sea: u = z+1 \rightarrow du = dz \qquad v = z\text{-}1 \rightarrow du = dz$

$$= \text{-}\frac{1}{2}\int \frac{du}{u} + \frac{1}{2}\int \frac{dv}{v} = \text{-}\frac{1}{2}ln|u| + \frac{1}{2}ln|v| = \frac{1}{2}ln\left|\frac{z\text{-}1}{z+1}\right|$$

$$2\int \frac{dz}{z^2\text{-}1} = ln\left|\frac{z\text{-}1}{z+1}\right| =$$

De la sustitución recomendada al inicio $1 + x + x^2 = (z\text{-}x)^2$

$\sqrt{1 + x + x^2} = z\text{-}x \rightarrow z = x + \sqrt{1 + x + x^2}$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1 + x + x^2}} = ln\left|\frac{x\sqrt{1 + x + x^2}\text{-}1}{x\sqrt{1 + x + x^2} + 1}\right| + C = ln\left|\frac{x\text{-}1\sqrt{1 + x + x^2}}{x + 1\sqrt{1 + x + x^2}}\right| + C$$

## Ejercicio 6

$$\int \frac{\boldsymbol{xdx}}{(\sqrt{\boldsymbol{5\text{-}4x\text{-}x^2}})^{\boldsymbol{3}}}$$

$5 - 4x\text{-}x^2 = \text{-}(x^2 + 4x\text{-}5) = \text{-}(x + 5)(x\text{-}1) = (x + 5)(\text{-}x + 1) = (5 + x)(1 - x)$

$Sustitución$: $(1 - x)^2 z^2 = 5 - 4x\text{-}x^2 = (5 + x)(1 - x)$

$(1 - x)^2 z^2 = (5 + x)(1 - x)$

① $(1 - x)z^2 = 5 + x$

$z^2\text{-}z^2 x = 5 + x$

$$z^2\text{-}5 = z^2 x + x = x(z^2 + 1) \quad \rightarrow \quad x = \frac{z^2\text{-}5}{(z^2 + 1)}$$

$$dx = \frac{(z^2 + 1)(2z)\text{-}(z^2\text{-}5)(2z)}{(z^2 + 1)^2} = \frac{12z}{(z^2 + 1)^2}dz$$

$$\int \frac{xdx}{[(1 - x)z]^3} = \int \frac{\left(\frac{z^2\text{-}5}{z^2 + 1}\right)\left(\frac{12z}{(z^2 + 1)^2}\right)dz}{\left[\left(1 - \frac{z^2\text{-}5}{z^2 + 1}\right)z\right]^3}$$

$$\int \frac{\frac{12z(z^2\text{-}5)}{(z^2 + 1)^3}dz}{\frac{(z^2 + 1 - z^2 + 5)^3\, z^3}{(z^2 + 1)^3}} = \int \frac{12z(z^2\text{-}5)}{6^3 z^3}dz = 2\int \frac{z^2\text{-}5}{36z^2}dz$$

$$= \frac{1}{18}\int \left(1 - \frac{5}{z^2}\right)dz = \frac{1}{18}z + \frac{5}{z} + C$$

$$de \ \textcircled{1} \quad (1-x)z^2 = 5+x \qquad z^2 = \frac{5+x}{1-x} \qquad z = \sqrt{\frac{5+x}{1-x}}$$

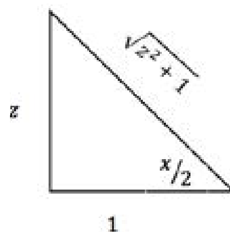
$$= \frac{1}{18}\sqrt{\frac{5+x}{1-x}} + \frac{5}{\sqrt{\frac{5+x}{1-x}}} + C = \frac{1}{18}\ \frac{\sqrt{5+x}}{\sqrt{1-x}} + \frac{5\sqrt{1-x}}{\sqrt{5+x}} + C$$

$$= \frac{5+x+5(1-x)18}{18\sqrt{1-x}\,\sqrt{5+x}} + C = \frac{5+x+5-5x}{18\sqrt{1-x}\,\sqrt{5+x}} = \frac{10-4x}{18\sqrt{1-x}\,\sqrt{5+x}}$$

$$= \frac{5-2x}{9\sqrt{1-x}\,\sqrt{5+x}} = \frac{5-2x}{9\sqrt{5-4x\text{-}x^2}} + C$$

## Ejercicio 7

$$\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{2+Cosx}}$$




$$Sea:\ sea\ tg\left(\frac{x}{2}\right) = z;\ Cosx = \frac{1-z^2}{z^2+1};\quad dx = \frac{2dz}{z^2+1}$$

$$\int \frac{dx}{2+Cosx} = \int \frac{2\frac{dz}{z^2+1}}{2+\frac{1-z^2}{z^2+1}} = 2\int \frac{dz}{2z^2+2+1-z^2} = 2\int \frac{dz}{z^2+3}$$

$$= 2\int \frac{dz}{z^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}} arc\ tg\ \frac{z}{\sqrt{3}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\ arc\ tg\ \left(\frac{1}{\sqrt{3}} tg\ \frac{x}{2}\right) + C$$

## Ejercicio 8

$$\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{Senx+tgx}}$$

$$Sea: z = tg\frac{x}{2}; Senx = \frac{2z}{z^2+1}; dx = \frac{2dz}{z^2+1}$$

Usando las funciones trigonométricas de ángulo doble

$$tgx = \frac{2tg\left(^x/_2\right)}{1-tg^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2z}{1-z^2} = \int \frac{2\frac{dz}{z^2+1}}{2z\left(\frac{1}{z^2+1}-\frac{1}{z^2-1}\right)}$$

$$\int \frac{\frac{dz}{z^2+1}}{z\left(\frac{1}{z^2+1}-\frac{1}{z^2-1}\right)} = \int \frac{\frac{dz}{z^2+1}}{z\left[\frac{z^2-1-z^2-1}{(z^2+1)(z^2-1)}\right]} = \int \frac{dz}{\frac{(-2z)}{z^2-1}} = -\frac{1}{2}\int \frac{(z^2-1)dz}{z}$$

$$= -\frac{1}{2}\int zdz + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} = -\frac{1}{2}\left(\frac{z^2}{2}\right) + \frac{1}{2}lnz + C$$

$$= -\frac{1}{4}tg^2\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$$

## Ejercicio 9

$$\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\sqrt{\boldsymbol{Cosx+Cos^2x}}}$$

$$Sea:\ sea\ tg\left(\frac{x}{2}\right) = z;\ Cosx = \frac{1-z^2}{z^2+1};\quad dx = \frac{2dz}{z^2+1}$$

$$= \int \frac{\frac{2dz}{z^2+1}}{\sqrt{\frac{1-z^2}{z^2+1}+(\frac{1-z^2}{z^2+1})^2}} = \int \frac{\frac{2dz}{z^2+1}}{\sqrt{\frac{(z^2+1)(1-z^2)+(1-z^2)^2}{(z^2+1)^2}}}$$

$$\int \frac{\frac{2dz}{z^2+1}}{\frac{\sqrt{(z^2+1)(1-z^2)+(1-z^2)^2}}{z^2+1}} = 2\int \frac{dz}{\sqrt{2(1-z^2)}} = \sqrt{2}\int \frac{dz}{1-z^2}$$

$$= \sqrt{2}\, arc\ Sen(z) + C$$

$$= \sqrt{2}\, arc\ Sen\left[tg\ \frac{x}{2}\right] + C$$

## Ejercicio 10

$$\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{1 + Cosx + Senx}}$$

$$Sea:\ Senx = \frac{2z}{z^2+1}; Cosx = \frac{1-z^2}{z^2+1}; dx = \frac{2dz}{z^2+1}$$

$$= \int \frac{\frac{2dz}{z^2+1}}{1 + \frac{1-z^2}{z^2+1} + \frac{2z}{z^2+1}} = \int \frac{\frac{2dz}{z^2+1}}{\frac{z^2+1+1\text{-}z^2+2z}{z^2+1}} = \int \frac{2dz}{2+2z} = \int \frac{dz}{1+z}$$

$$Sea: u = 1 + z; du = dz$$

$$= \int \frac{du}{u} = ln|u| = ln|1+z| = ln\left|1 + tg\frac{x}{2}\right|$$

# Solución de ejercicios propuestos sobre Cambio de Límites correspondiente a un cambio de variables

## Ejercicio 1

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \boldsymbol{Cos^4 x\, Senx\, dx}$$

$Sea: u = Cosx \rightarrow du = \text{-}Senxdx$

$Para: x = 0 \quad u = Cos(0) = 1 \qquad x = \frac{\pi}{3} \quad u = Cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$$= \text{-}\int_{0}^{\frac{1}{2}} u^4 du = \text{-}\frac{u^5}{5}\bigg|\begin{matrix} 1/2 \\ 1 \end{matrix} = \text{-}\frac{1}{5}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^5 \text{-}(1)^5\right] = \text{-}\frac{1}{5}\left[\frac{1}{32}\text{-}1\right] =$$

$$= \text{-}\frac{1}{5}\left(\text{-}\frac{31}{32}\right) = \frac{31}{160} = 0.19375$$

## Ejercicio 2

$$\int_{1}^{3} \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{x}\text{-}\mathbf{1}} \text{-} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{1}}\right) \boldsymbol{dx}$$

$$\int_{1}^{3} \frac{dx}{2x\text{-}1} \text{-} \int_{1}^{3} \frac{dx}{2x + 1}$$

*Primera integral*

$$\int_1^3 \frac{dx}{2x\text{-}1} \qquad u = 2x\text{-}1 \rightarrow du = 2dx \rightarrow dx = \frac{du}{2}$$

$Para: x = 1 \quad u = 1$

$x = 3 \quad u = 5$

$$\int_1^3 \frac{dx}{2x\text{-}1} = \frac{1}{2}\int_1^5 \frac{du}{u} = \frac{1}{2}|\ln u|\,\begin{matrix}5\\1\end{matrix} = \frac{1}{2}(ln5 - ln1)$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{1}\right) = \frac{1}{2}ln5 = 0.8047$$

*Segunda integral*

$$\int_1^3 \frac{dx}{2x+1} \qquad u = 2x + 1 \rightarrow du = 2dx \rightarrow dx = \frac{du}{2}$$

$Para: x = 1 \quad u = 3$

$x = 3 \quad u = 7$

$$\int_1^3 \frac{dx}{2x+1} = \frac{1}{2}\int_3^7 \frac{du}{u} = \frac{1}{2}|\ln u|\,\begin{matrix}7\\3\end{matrix} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{7}{3}\right) = 0.4236$$

$$\int_1^3 \left(\frac{1}{2x\text{-}1}\text{-}\frac{1}{2x+1}\right)dx = \frac{1}{2}\left[ln5 - \ln\left(\frac{7}{3}\right)\right]\frac{1}{2}\ln\left(\frac{15}{7}\right) = 0.3811$$

## Ejercicio 3

$$\int_2^4 \frac{\boldsymbol{e^{lnx}}}{\boldsymbol{x^2+7}}\boldsymbol{dx}$$

$ya\ que\ e^{lnx} = x$

$$= \int_2^4 \frac{x}{x^2+7}dx \qquad Sea: u = x^2 + 7 \rightarrow du = 2xdx \rightarrow dx = \frac{du}{2}$$

$Para: x = 2 \quad u = 11$

$x = 4 \quad u = 23$

$$= \frac{1}{2}\int_{11}^{23}\frac{du}{u} = \frac{1}{2}|\ln u| \begin{matrix} 23 \\ 11 \end{matrix} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{23}{11}\right) = 0.3688$$

## Ejercicio 4

$$\int_0^1 \frac{\boldsymbol{arc\ tgx}}{\boldsymbol{x^2+1}}\boldsymbol{dx}$$

$Sea:\ u = arc\ tgx \rightarrow du = \dfrac{1}{x^2+1}dx \rightarrow dx = du(x^2+1)$

$Para: x = 0 \quad u = 0$

$x = 1 \quad u = \frac{\pi}{4}$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{u\ du(x^2+1)}{x^2+1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} udu = \frac{u^2}{2}\Bigg| \begin{matrix} \frac{\pi}{4} \\ 0 \end{matrix} = \frac{\pi^2}{32} = 0.3084$$

## Ejercicio 5

$$\int_6^9 \frac{\boldsymbol{3lnx\text{-}5}}{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{dx}$$

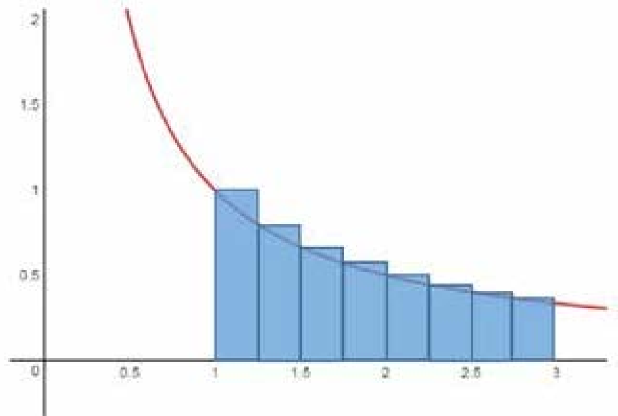
$Sea:\ u = 3ln\text{-}5 \rightarrow du = \dfrac{3}{x}dx$

$$\frac{1}{3}\int_{0.3752}^{1.5917} udu = \frac{1}{3}\left|\frac{u^2}{2}\right| \begin{matrix} 1.5917 \\ 0.3752 \end{matrix} = \frac{1}{6}[1.5917^2\text{-}0.3752^2] = 0.3988$$

# Solución ejercicios propuestos sobre Área Bajo la Curva

***1. Encontrar el área bajo la curva de la función f(x)=1/x en forma aproximada (por exceso) entre 1 y 3 usando rectángulos diferenciales con incrementos de 0.25***

Figura 1
Ejercicio propuesto 1 sobre Área bajo la curva




$$A1 = (0.25)f(1) = (0.25)(1) = 0.25$$

$$A2 = (0.25)f(1.25) = (0.25)\frac{1}{1.25} = 0.2$$

$$A3 = (0.25)f(1.50) = (0.25)\frac{1}{1.50} = 0.1667$$

$$A4 = (0.25)f(1.75) = (0.25)\frac{1}{1.75} = 0.1428$$

$$A5 = (0.25)f(2.00) = (0.25)\frac{1}{2.00} = 0.125$$

$$A6 = (0.25)f(2.25) = (0.25)\frac{1}{2.25} = 0.1111$$

$$A7 = (0.25)f(2.50) = (0.25)\frac{1}{2.50} = 0.1000$$

$$A8 = (0.25)f(2.75) = (0.25)\frac{1}{2.75} = 0.0909$$

$$AT = 1.2865$$

El área exacta calculada por integración es:

$$A = \int_1^3 \frac{dx}{x} = \ln x \, | \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} = \ln \left| \frac{3}{1} \right| = 1.0986$$

El área aproximada es mayor que el área exacta, como se esperaba.

***2. Encontrar el área bajo la curva de la función $\mathbf{f(x) = e^{-x^2}}$ en forma aproximada (por defecto) entre 0 y 1 usando rectángulos diferenciales con incrementos de 0.25***

$$A1 = f(0.25)(0.25) = (0.9394)(0.25) = 0.2348$$

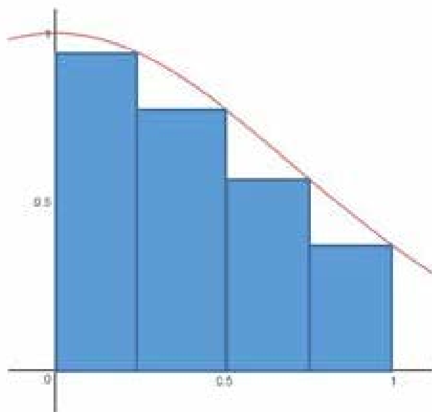
$$A2 = f(0.5)(0.25) = (0.7788)(0.25) = 0.1947$$

$$A3 = f(0.75)(0.25) = (05697)(0.25) = 0.1424$$

$$A4 = f(1)(0.25) = (0.3678)(0.25) = 0.092$$

$$AT = 0.6639\, u^2$$

Figura 2
Ejercicio Propuesto 2 sobre Área Bajo la Curva




El área exacta calculada por integración es:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = 0.74682\ u^2$$

El área aproximada es menor que el área exacta, como se esperaba

***3. Encontrar el área bajo la curva de la función $y=x^3-x^2-6x$ en forma aproximada por el método de los trapecios, entre −2 y 0 con incrementos de 0.25***

$$A1 = \left(\frac{f(-1.75) + f(-2)}{2}\right)(0.25) = \left(\frac{2.078 + 0}{2}\right)(0.25) = 0.25975$$

$$A2 = \left(\frac{f(-1.5) + f(-1.75)}{2}\right)(0.25) = \left(\frac{3.375 + 2.0781}{2}\right)(1.25) = 0.6816$$

$$A3 = \left(\frac{f(-1.25) + f(-1.5)}{2}\right)(0.25) = \left(\frac{3.9843 + 3.375}{2}\right)(0.25) = 0.9199$$

$$A4 = \left(\frac{f(\text{-}1) + f(\text{-}1.25)}{2}\right)(0.25) = \left(\frac{4 + 3.9843}{2}\right)(0.25) = 0.9980$$

$$A5 = \left(\frac{f(\text{-}0.75) + f(\text{-}1)}{2}\right)(0.25) = \left(\frac{3.5156 + 4}{2}\right)(0.25) = 0.9394$$

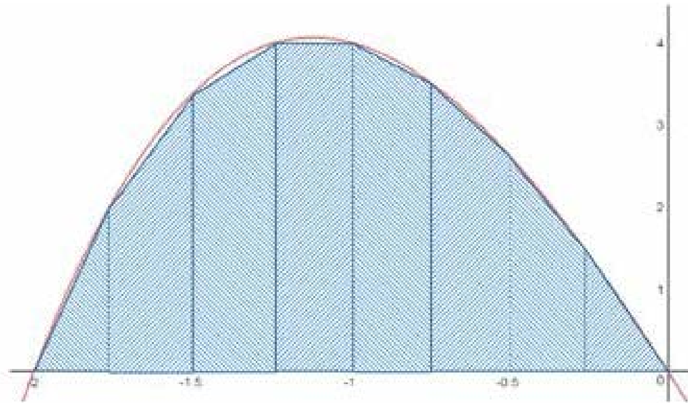
$$A6 = \left(\frac{f(\text{-}0.5) + f(\text{-}0.75)}{2}\right)(0.25) = \left(\frac{2.625 + 3.5156}{2}\right)(0.25) = 0.7675$$

$$A7 = \left(\frac{f(\text{-}0.5) + f(\text{-}0.25)}{2}\right)(0.25) = \left(\frac{2.625 + 1.4218}{2}\right)(0.25) = 0.50586$$

$$A8 = \left(\frac{f(\text{-}0.25) + f(0)}{2}\right)(0.25) = \left(\frac{1.4218 + 0}{2}\right)(0.25) = 0.1777$$

$AT = 5.2497\ u^2$

Figura 3
Ejercicio propuesto 3 sobre Área Bajo la Curva



El área exacta calculada por integración es:

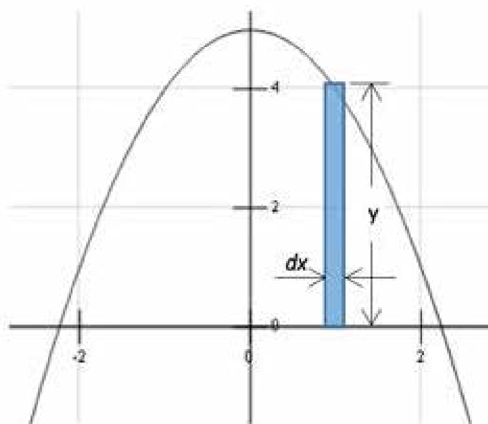
$$\int_{-2}^{0} (x^3 \text{-} x^2 \text{-} 6x)dx = 5.3333\ u^2$$

El área aproximada es ligeramente menor que el área exacta, como se esperaba

*4. Hallar el área comprendida entre la función $y=-x^2+5$ y el eje x, usando:*

- Rectángulos diferenciales verticales
- Rectángulos diferenciales horizontales

Figura 4
Ejercicio propuesto 4 sobre Área Bajo la Curva




*a. Rectángulos diferenciales verticales*

$f(x) = -x^2 + 5$

Reemplazando x por x

$f(-x) = -(-x^2) + 5 = -x^2 + 5$

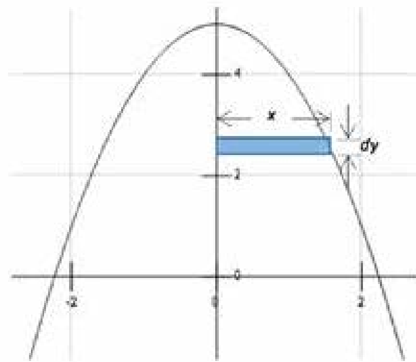
Luego la función es simétrica con respecto al eje $y$. Se procede a calcular entre 0 y $\sqrt{5}$

$$A = 2\int_0^{\sqrt{5}} (\text{-}x^2 + 5)dx = 2\left[\text{-}\int_0^{\sqrt{5}} x^2 dx + 5\int_0^{\sqrt{5}} dx\right]$$

$$A = 2\left[\text{-}\left|\frac{x^3}{3}\right|\begin{matrix}\sqrt{5}\\0\end{matrix} + 5|x|\begin{matrix}\sqrt{5}\\0\end{matrix}\right] = 2\left[\text{-}\frac{1}{3}((\sqrt{5})^3 + 5(\sqrt{5})\right] = 2\left[\text{-}\frac{5\sqrt{5}}{3} + 5\sqrt{5}\right]$$

$$= 2\left[5\sqrt{5}\left(1 - \frac{1}{3}\right)\right] = 2\left(\frac{2.5}{3}\sqrt{5}\right) = \frac{20}{3}\sqrt{5} = 14.907\ u^2$$

Figura 5
Ejercicio propuesto 4 sobre Área Bajo la Curva




*b. Rectángulos diferenciales horizontales*

$A = 2\int_0^5 xdy = 2\int_0^5 \sqrt{5 - y}\, dy$

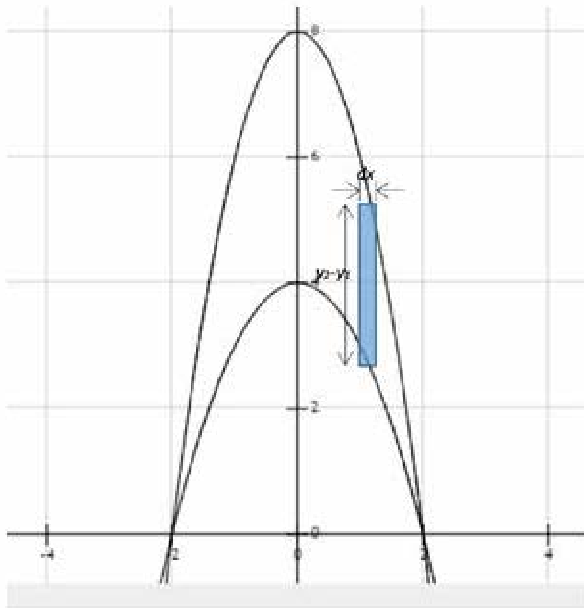
Sea $u=5\text{-}y$ $du=\text{-}dy$

Para $y=0$ $u=5$ *para* $y=5$ $u=0$

$$\text{-}2\int_5^0 u^{1/2}\, du = -2 \cdot \frac{2}{3}\left|u^{3/2}\right|\begin{matrix}0\\5\end{matrix} = \text{-}\frac{4}{3}\left(0^{3/2}\text{-}5^{3/2}\right) = \frac{20}{3}\sqrt{5} = 14.907\ u^2$$

## *5. Hallar el área comprendida entre las curvas $y=8-2x^2$; $y=4-x^2$*

Figura 6
Ejercicio propuesto 5 sobre Área Bajo la Curva



Haciendo la prueba de simetría a ambas funciones:

$f(\text{-}x) = 8 - 2(-x)^2 = 8 - 2x^2$ $(Simétrica)$

$g(\text{-}x) = 4 - (-x)^2 = 4 - x^2(Simétrica)$

Límites de integración:

$8 - 2x^2 = 4 - x^2 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

$para: x = 2 \quad f(x) = 8 - 2(2)^2 = 0 \qquad (2, 0)$

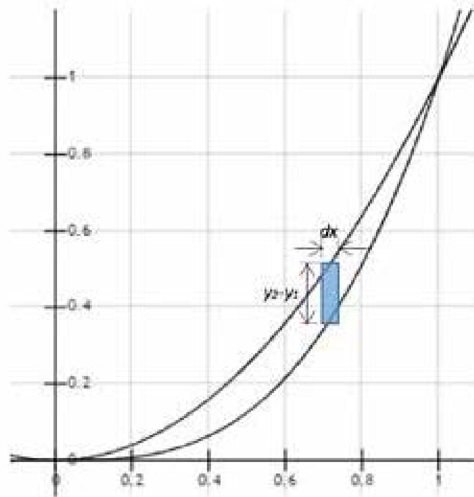
$x = -2 \quad f(x) = 8 - 2(-2)^2 = 0 \qquad (-2, 0)$

$$A = 2\int_0^2 [8 - 2x^2\text{-}(4 - x^2)]dx = 2\int_0^2 (4 - x^2)dx = 2\left[4|x|\begin{matrix}2\\0\end{matrix}\text{-}\frac{1}{3}|x^3|\begin{matrix}2\\0\end{matrix}\right]$$

$$= 2\left[8 - \frac{1}{3}(8)\right] = 2\left(\frac{16}{3}\right) = \frac{32}{3}\ u^2$$

## *6. Hallar el área comprendida entre las curvas y=x²; y=x³*

Figura 7
Ejercicio propuesto 6 sobre Área Bajo la Curva




*Puntos de intersección*

$x^2 = x^3 \rightarrow x^3\text{-}x^2 = 0$

$x^2(x\text{-}1) = 0$

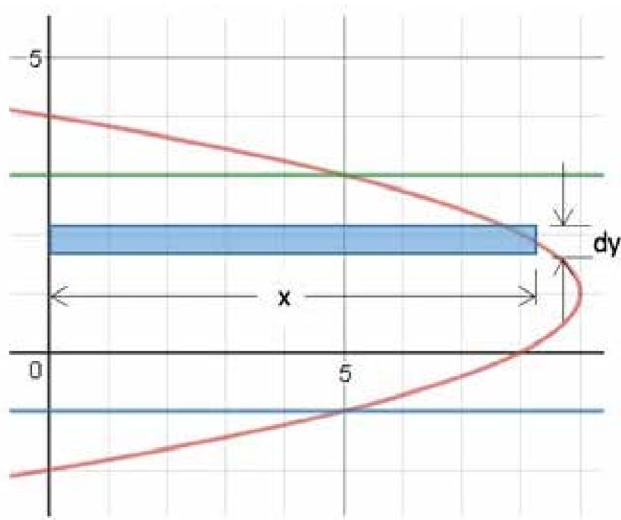
$x_1 = 0; x_2 = 1$

$$A = \int_0^1 (x^2\text{-}x^3)dx = \left[\frac{1}{3}|x^3|\,\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\text{-}\frac{1}{4}|x^4|\,\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right]$$

$$= \frac{1}{3}(1)^3\text{-}\frac{1}{4}(1)^4 = \frac{1}{3}\text{-}\frac{1}{4} = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12}\ u^2$$

***7. Hallar el área comprendida entre la parábola $y^2–2y+x–8=0$, las recta $x=0$, $y=–1$, $y=3$***

Figura 8
Ejercicio propuesto 7 sobre Área Bajo la Curva




$$= \int_{-1}^{3} xdy = \int_{-1}^{3} (8 + 2y\text{-}y^2)dy$$

$$A = 8|y|\,\begin{matrix}3\\-1\end{matrix} + 2\left|\frac{y^2}{2}\right|\,\begin{matrix}3\\-1\end{matrix}\text{-}\frac{1}{3}|y^3|\,\begin{matrix}3\\-1\end{matrix}$$

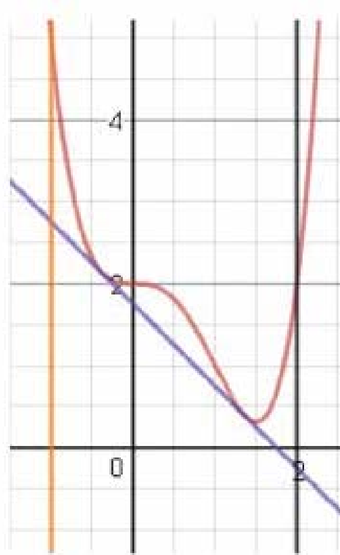
$$A = 8[3-(-1)] + [3^2\text{-}(-1)^2]\text{-}\frac{1}{3}[3^3\text{-}(-1)^3]$$

$A = 8(4) + (8)\text{-}\frac{1}{3}(28)$

$A = 32 + 8 - \frac{28}{3} = 40 - \frac{28}{3} = \frac{92}{3}\ \ u^2$

***8. Encontrar el área de la región comprendida entre las curvas: $y=x^4-2x^3+2$; $x=-1$; $x=2$; $y=-x+7/4$***

Figura 9
Ejercicio propuesto 8 sobre Área Bajo la Curva




Dada la complejidad de la figura, es mejor calcular por separado las áreas bajo las curvas $\boldsymbol{y = x^4\text{-}2x^3 + 2}$ **y** $\boldsymbol{y = \text{-}x + \frac{7}{4}}$ y luego restarlas

$A1 = \int_{-1}^{2}(x^4\text{-}2x^3 + 2)dx = \frac{1}{5}|x^5|\begin{matrix}2\\-1\end{matrix}\text{-}\frac{2}{4}|x^4|\begin{matrix}2\\-1\end{matrix} + 2|x|\begin{matrix}2\\-1\end{matrix}$

$$A1 = \frac{1}{5}[2^5\text{-}(-1)^5]\text{-}\frac{1}{2}[2^4\text{-}(-1)^4] + 2[2-(-1)]$$

$$= \frac{1}{5}(32+1)\text{-}\frac{1}{2}(16-1) + 2(3) = \frac{33}{5}\text{-}\frac{15}{2} + 6 = \frac{51}{10}$$

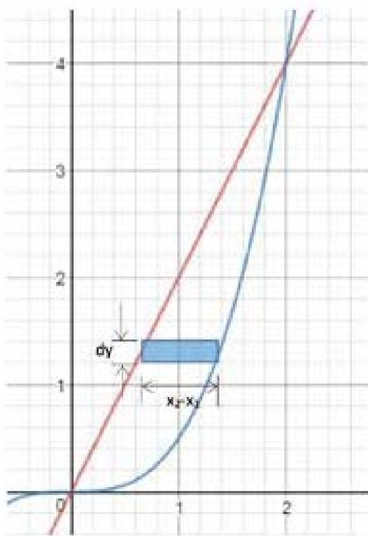
$$A2 = \int_{-1}^{2}\left(\text{-}x + \frac{7}{4}\right)dx = \text{-}\frac{1}{2}|x^2|\begin{matrix}2\\-1\end{matrix} + \frac{7}{4}|x|\begin{matrix}2\\-1\end{matrix} = \text{-}\frac{1}{2}[2^2\text{-}(-1)^2] + \frac{7}{4}[2-(-1)]$$

$$A2 = -\frac{1}{2}(4-1) + \frac{7}{4}(3) = \text{-}\frac{3}{2} + \frac{21}{4} = \frac{15}{4}$$

$$AT = A1 - A2 = \frac{51}{10}\text{-}\frac{15}{4} = \frac{27}{20}\ \ u^2$$

***9. Hallar el área comprendida entre las curvas: y=2x; y=(1/2)$x^3$ usando rectángulos diferenciales horizontales***

Figura 10
Ejercicio propuesto 9 sobre Área Bajo la Curva



$x_2 = \sqrt[3]{2y_2}; x1 = \frac{y_1}{2}$

$Punto\ de\ Intersección\ 2x = \frac{1}{2}x^3 \rightarrow x^3\text{-}4x = 0$

$x(x^2\text{-}4) = 0 \quad x_1 = 0;\ x_2 = \pm 2 \rightarrow y = 4x(x^2\text{-}4) = 0 \quad x1 = 0;\ x2 = \pm 2 \rightarrow y = 4$

$$A = \int_0^4 \left(\sqrt[3]{2y}\text{-}\frac{y}{2}\right) dy$$

$$= \sqrt[3]{2}\int_0^4 y^{1/3} dy\text{-}\frac{1}{2}\int_0^4 y dy$$

$$= \sqrt[3]{2}\left|\frac{y^{4/3}}{4/3}\right|\begin{matrix}4\\0\end{matrix}\text{-}\frac{1}{2}\left|\frac{y^2}{2}\right|\begin{matrix}4\\0\end{matrix} = \frac{3\sqrt[3]{2}}{4}\left(4^{4/3}\right)\text{-}\frac{1}{4}(4^2)$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{2}\ \sqrt[3]{4^4}\text{-}4 = \frac{3}{4}\sqrt[3]{2}\ \sqrt[3]{4^3 4}\text{-}4$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{2}\ \ 4\sqrt[3]{4}\text{-}4 = 3\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{2}\text{-}4 = 2\ u^2$$

## *10. Usando integrales, calcular el área de la elipse con cetro en el origen, semieje mayor "a" y semieje menor "b"*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow y = \sqrt{b^2\text{-}\frac{b^2}{a^2}x^2} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2\text{-}x^2}$$

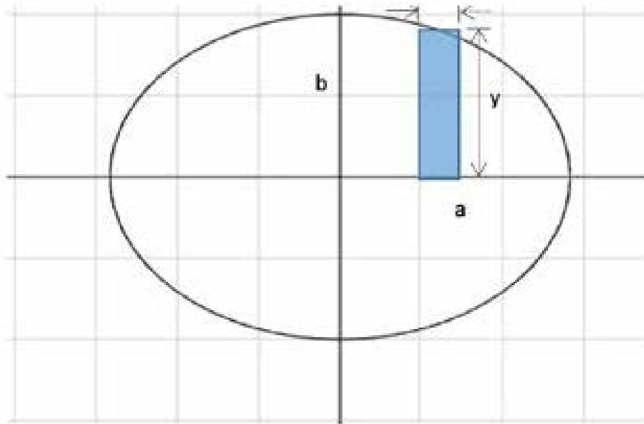
$$A = \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2\text{-}x^2}\ dx$$

$Sea: x = a\ Sent\ \ dx = a\ Cost\ dt$

Cambio de Limites: (cuarta parte del área)

$para\ x = 0 \quad t = arc\ Sen\frac{x}{a} = arc\ Sen\frac{0}{a} = 0$

Figura 11
Ejercicio propuesto 10 sobre Área Bajo la Curva




$$para\ x = a \quad t = arc\ Sen\frac{a}{a} = \frac{\pi}{2}$$

$$A = \frac{b}{a}\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\text{-}a^2Sen^2t}\ aCostdt = \frac{b}{a}\int_0^{\pi/2} a\sqrt{1 - Sen^2t}\ aCost\ dt$$

$$= ab\int_0^{\pi/2} Cos^2\ tdt = ab\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(1 + Cos\ 2t)dt = \frac{ab}{2}\left[\int_0^{\pi/2} dt + \int_0^{\pi/2} Cos\ 2t\ dt\right]$$

$$= \frac{ab}{2}\left[\frac{\pi}{2} + \left|\frac{Sen\ 2t}{2}\right|_0^{\pi/2}\right] = \frac{ab}{2}\left[\frac{\pi}{2}\ \frac{1}{2}(0-0)\right] = \frac{\pi ab}{4}$$

Multiplicando por 4 el área total: $A = \pi ab$

# Solución de ejercicios propuestos de Integrales Impropias

*Ejercicio 1*

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{b\to\infty} |arctg\ x| \begin{matrix} b \\ 0 \end{matrix} = \lim_{b\to\infty} [arctg\ b\text{-}arctg\ 0] = \frac{\pi}{2}$$

*Ejercicio 2*

$$\int_{100}^{\infty} e^x\, dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_{100}^{b} e^x\, dx = \lim_{b\to\infty} |e^x| \begin{matrix} b \\ 100 \end{matrix} = \lim_{b\to\infty} |e^b\text{-}e^{100}|$$

La integral diverge

*Ejercicio 3*

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^{1,00001}}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_{1}^{b} x^{-1,00001}\, dx = \lim_{b\to\infty} \left| \frac{x^{-0,00001}}{-0,00001} \right| \begin{matrix} b \\ 1 \end{matrix}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left|\frac{1}{(0{,}00001)x^{0{,}00001}}\right|_{1}^{b} = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{0{,}00001b^{0{,}00001}} - \frac{1}{0{,}00001\ \ 1^{0{,}00001}}\right]$$

$$= 100.000$$

## *Ejercicio 4*

$$\int_{1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{x\text{-}1}}$$

$$= \lim_{a\to\epsilon}\int_{a\to\epsilon}^{2}(x\text{-}1)^{\text{-}1/3}\,dx \qquad Sea{:}\,u = x\text{-}1 \quad du = dx$$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{1+\epsilon}^{2}u^{\text{-}1/3}du = \lim_{\epsilon\to 0}\left|\frac{u^{2/3}}{2/3}\right|_{1+\epsilon}^{2} = \frac{3}{2}\lim_{\epsilon\to 0}\left|(x\text{-}1)^{2/3}\right|_{1+\epsilon}^{2}$$

$$= \frac{3}{2}\lim_{\epsilon\to 0}\left[(2-1)^{2/3}\text{-}(1+\epsilon\text{-}1)^{2/3}\right] = \frac{3}{2}(1-0) = \frac{3}{2}$$

## *Ejercicio 5*

$$\int_{3}^{\infty}\boldsymbol{xlnxdx}$$

$$u = lnx \to du = \frac{dx}{x} \qquad dv = xdx \to v = \frac{x^2}{2}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left|\frac{x^2}{2}lnx\text{-}\int\frac{x^2}{2}\ \frac{dx}{x}\right|_{3}^{b} = \lim_{b\to\infty}\left|\frac{x^2}{2}lnx\text{-}\frac{1}{2}\int xdx\right|_{3}^{b}$$

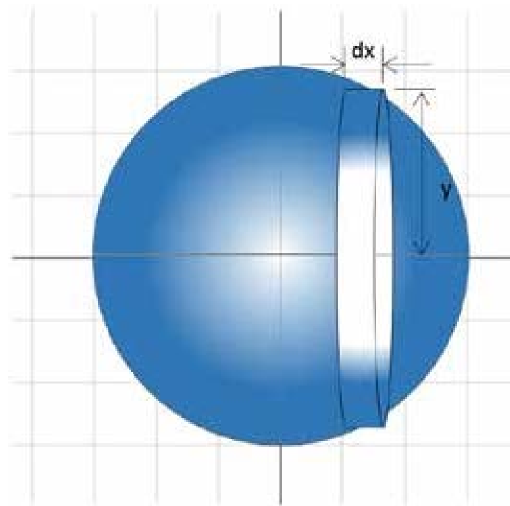
$$= \lim_{b\to\infty}\left|\frac{1}{2}x^2lnx\text{-}\frac{1}{4}x^2\right|_{3}^{b} = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{2}b^2lnb\text{-}\frac{1}{4}b^2\text{-}\left(\frac{1}{2}3^2ln3-\frac{1}{4}3^2\right)\right]$$

La integral diverge

# Solución de ejercicios propuestos sobre Volúmenes

*1. Calcule el volumen de una esfera de radio r usando el método de discos*

Figura 12
Ejercicio propuesto 1 sobre ejercicios Volúmenes




Ecuación del círculo generador de la esfera:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$dV = \pi y^2 dx = \pi(r^2 - x^2)dx$$

$$V = \pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx$$

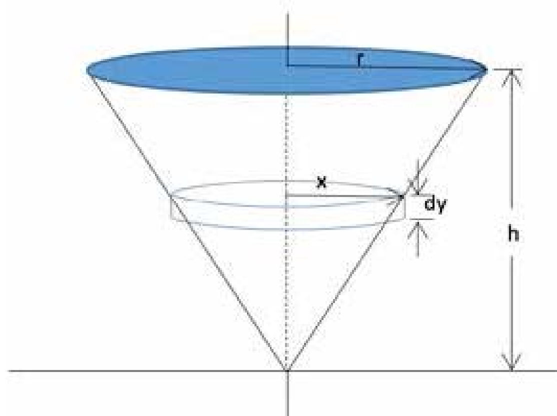
$$= \pi \left[ r^2 |x| \begin{matrix} r \\ 0 \end{matrix} - \left| \frac{x^3}{3} \right| \begin{matrix} r \\ 0 \end{matrix} \right]$$

$$= \pi \left[ r^3 - \frac{r^3}{3} \right] = \frac{2}{3} \pi r^3$$

$$La\ esfera\ total\ es\ \frac{4}{3} \pi\, r^3$$

## *2. Calcule el volumen de un cono de radio r y altura h*

Figura 13
Ejercicio propuesto 2 sobre Volúmenes




Ecuación de la recta que genera el cono:

$$y = \frac{h}{r} x \rightarrow x = \frac{r}{h} y$$

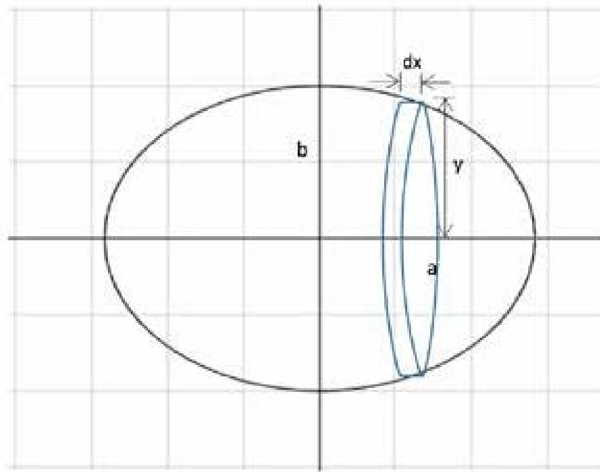
$$dV = \pi x^2 dy = \pi (\frac{r}{h} y)^2\, dy$$

$$V = \frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h y^2 dy = \frac{\pi r^2}{h^2}\left|\frac{y^3}{3}\right|\begin{matrix} h \\ 0 \end{matrix} = \frac{\pi r^2}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3}$$

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

### *3. Calcule el volumen generado por una elipse horizontal con semieje mayor a y semieje menor b, rotando sobre el eje x:*

Figura 14
Ejercicio propuesto 3 sobre Volúmenes




$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$y^2 = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) b^2$$

$$dV = \pi y^2 dx$$

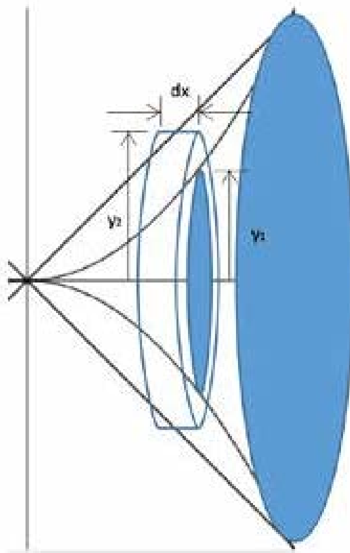
$$V = \pi \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) b^2\, dx = \pi \left[ b^2 |x| \begin{matrix} a \\ 0 \end{matrix} - \frac{b^2}{a^2}\left|\frac{x^3}{3}\right|\begin{matrix} a \\ 0 \end{matrix} \right] = \pi \left[ ab^2 - \frac{b^2}{a^2}\frac{a^3}{3} \right]$$

$$V = \pi\left(ab^2\text{-}\frac{1}{3}b^2a\right) = \frac{2}{3}\pi ab^2$$

El volumen total es el doble: $V = \frac{4}{3}\pi ab^2$

***4. Encontrar el volumen del sólido generado al rotar el área comprendida entre las curvas y=x; y=x².***

Figura 15
Ejercicio propuesto 4 sobre Volúmenes



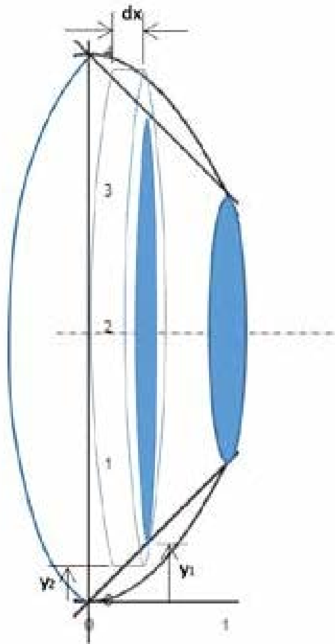

$$dV = \pi(y_2^2\text{-}y_1^2)dx = \pi(x^2\text{-}x^4)dx$$

$$V = \pi\int_0^1 (x^2\text{-}x^4)dx = \left[\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 \text{-}\frac{x^5}{5}\Big|_0^1\right]$$

$$V = \pi\left(\frac{1}{3}\text{-}\frac{1}{5}\right) = \pi\left(\frac{5-3}{15}\right) = \frac{2}{15}\pi\, u^2$$

*5. Encontrar el volumen del sólido generado en el ejercicio 4 al girar alrededor del eje y=2*

Figura 16
Ejercicio propuesto 5 sobre Volúmenes




$dV = \pi[(2 - y_1)^2\text{-}(2 - y_2)^2]dx$

$dV = \pi[(2 - x^2)^2\text{-}(2 - x)^2]dx$

$dV = \pi[(4 - 4x^2 + x^4)\text{-}(4 - 4x + x^2)]dx$

$dV = \pi[4 - 4x^2 + x^4\text{-}4 + 4x\text{-}x^2]dx$

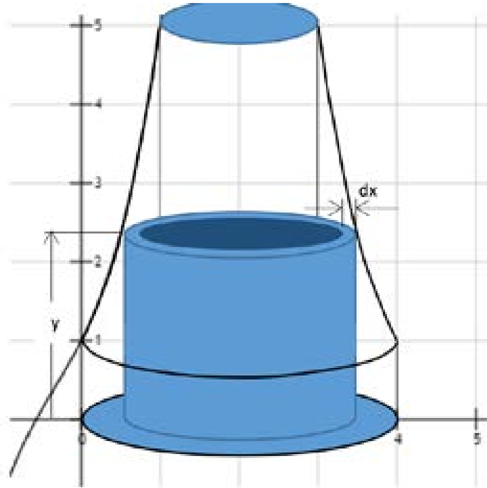
$dV = \pi[x^4\text{-}5x^2 + 4x]dx$

$$V = \pi \int_0^1 (x^4\text{-}5x^2 + 4x)dx$$

$$V=\pi\left[\frac{x^5}{5}\right|\text{-}5\frac{x^3}{3}\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}+4\frac{x^2}{2}\right|\left.\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right]=\pi\left(\frac{1}{5}\text{-}\frac{5}{3}+2\right)=\pi\left(\frac{3-25+30}{15}\right)=\frac{8}{15}\pi$$

### *6. Calcular el volumen del sólido generado al girar la región entre las curvas $y=x^3+x^2+2x+1$, $x=1$, el eje x, el eje y, alrededor del eje $x=2$*

Figura 17
Ejercicio propuesto 6 sobre Volúmenes




$y_1=x^3+x^2+2x+1 \qquad y_2\ x=1$

$dV=\pi(x_2^2\text{-}x_1^2)dy$

Ya que es difícil despejar x, se intentará resolver el problema por medio de cilindros diferenciales o casquetes

$dV=2\pi(2-x)(x^3+x^2+2x+1)dx$

$dV=2\pi(2x^3+2x^2+4x+2-x^4\text{-}x^3\text{-}2x^2\text{-}x)dx$

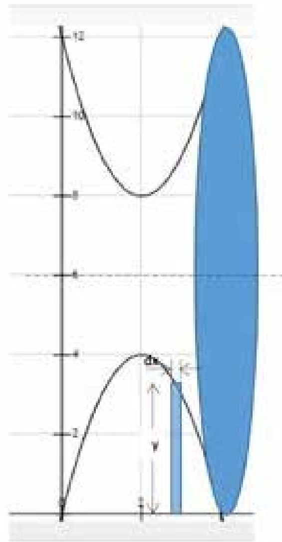
$$V=2\pi\int_0^1(\text{-}x^4+x^3+3x+2)dx$$

$$V = 2\pi\left[-\frac{x^5}{5}\Big|_0^1 + \left|\frac{x^4}{4}\right|_0^1 + 3\left|\frac{x^2}{2}\right|_0^1 + 2|x|\,\Big|_0^1\right]$$

$$= 2\pi\left[-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{3}{2}+2\right] = 2\pi\,\frac{-4+5+30+40}{20} = \frac{71}{20}\cdot 2\pi = \frac{71}{10}\pi$$

***7. Hallar el volumen que se genera al rotar el área comprendida entre la parábola y=4x–x² y el eje x con respecto a la recta y=6***

Figura 18
Ejercicio propuesto 7 sobre Volúmenes



$$dV = \pi[6^2 - (6-y)^2]dx$$

$$dV = \pi[6^2 - 6^2 + 12y + y^2]dx = \pi[(12y - y^2)dx]$$

$$dV = \pi[12(4x - x^2) - (4x - x^2)^2]dx$$

$$V = \pi\int_0^4 (48x - 12x^2 - 16x^2 + 8x^3 - x^4)dx$$

$$V = \pi \int_0^4 (48x\text{-}28x^2 + 8x^3\text{-}x^4)dx$$

$$= \pi \left[ 48 \left| \frac{x^2}{2} \right|_0^4 \text{-}28 \left| \frac{x^3}{3} \right|_0^4 + 8 \left| \frac{x^4}{4} \right|_0^4 \text{-} \left| \frac{x^5}{5} \right|_0^4 \right]$$

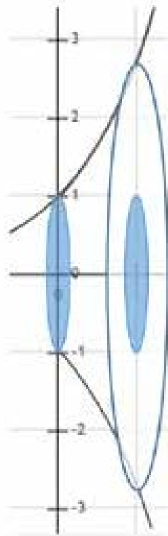
$$V = \pi\big(24(4^2)\big)\text{-}\frac{28}{3}(4^3) + 2(4^4)\text{-}\frac{4^5}{5}$$

$$V = \pi\left(384 - \frac{1792}{3} + 512 - \frac{1024}{5}\right)$$

$$V = \pi\left(\frac{5760 - 8960 + 7680 - 3072}{15}\right) = \frac{1408}{15}\pi$$

***8. Encontrar el volumen del sólido que se genera al girar la región comprendida entre y=e$^x$, y=1, x=1, alrededor del eje x***

Figura 19
Ejercicio propuesto 8 sobre Volúmenes



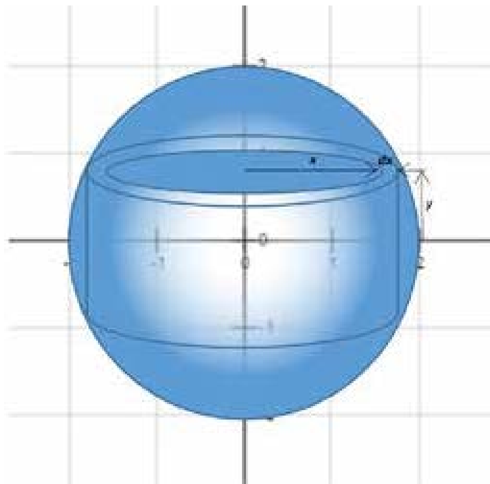
$dV = \pi(y_2^2 - y_1^2)dx = \pi(e^{2x} - 1^2)dx$

$V = \pi \int_0^1 (e^{2x} - 1)dx = \pi \left[ \left| \frac{e^{2x}}{2} \right|_0^1 - |x|_0^1 \right]$

$= \pi \left[ \left( \frac{e^2}{2} - \frac{e^0}{2} - 1 \right) \right] = \pi \left[ \left( \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} - 1 \right) \right] = \frac{e^2 - 3}{2}\pi = 6{,}8943\ u^3$

***9. Resolver el problema 1 de esta sección usando el método de cilindros diferenciales huecos o casquetes.***

Figura 20
Ejercicio propuesto 9 sobre Volúmenes



$Ec. Círculo\ x^2 + y^2 = r^2$

$dv = 2\pi r h dr = 2\pi x(2y)dx$

$dV = 4\pi x \left( \sqrt{r^2 - x^2} \right) dx$

$V = 4\pi \int_0^r x\sqrt{r^2 - x^2}dx$

$Sea: u = r^2 \text{-} x^2$

$du = -2xdx$

$$V = 4\pi \int_0^r x\sqrt{u}\left(\text{-}\frac{du}{2x}\right)$$

$$= \text{-}\frac{4\pi}{2}\int_0^r u^{1/2}du$$

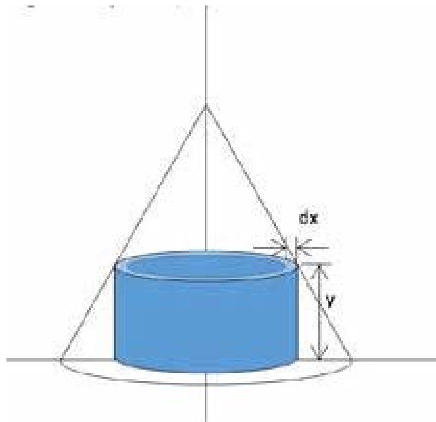
$$= -2\pi \left|\frac{u^{3/2}}{3/2}\right| \begin{matrix} r \\ 0 \end{matrix}$$

$$V = \text{-}\frac{4}{3}\pi \left[\left|(r^2\text{-}x^2)^{3/2}\right|_0^r\right] = \text{-}\frac{4}{3}\pi\left[\sqrt{(r^2\text{-}x^2)^3}\,\Big|_0^r\right]$$

$$= —\frac{4}{3}\pi\left[\sqrt{(r^2— r^2)^3}— \sqrt{(r^2— 0^2)^3}\right] = \frac{4}{3}\pi\, r^3$$

***10. Resolver el problema 2 de esta sección usando el método de cilindros diferenciales huecos o casquetes***

Figura 21
Ejercicio propuesto 10 sobre Volúmenes



En ese caso conviene poner el cono con la base hacia abajo.

$dV = 2\pi rhdr = 2\pi xydx =$

$= 2\pi x\left(-\frac{h}{r}x + h\right)dx$

$= 2\pi\left(-\frac{h}{r}x^2 + hx\right)dx$

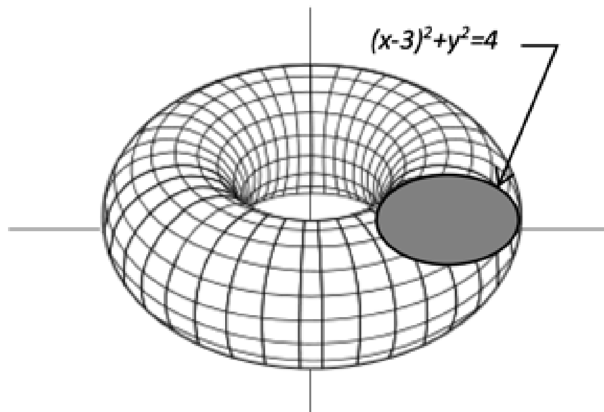
$V = 2\pi\int_0^r (-\frac{h}{r}x^2 + hx)dx$

$V = 2\pi\left[-\frac{h}{r}\left|\frac{x^3}{3}\right|\begin{matrix} r \\ 0 \end{matrix} + h\left|\frac{x^2}{2}\right|\begin{matrix} r \\ 0 \end{matrix}\right]$

$= 2\pi\left[-\frac{hr^3}{3r} + \frac{hr^2}{2}\right] = 2\pi\left[\frac{-2hr^2 + 3hr^2}{6}\right] = \frac{\pi}{3}h\,r^2$

***11. Hallar el volumen del toroide que se genera al girar alrededor del eje y, la curva $(x-3)^2+y^2=4$***

Figura 22
Ejercicio propuesto 11 sobre Volúmenes



$(x\text{-}3)^2+y^2=4$ es un círculo de radio r=2 con centro en (2,0)

En este caso es mejor hacer una traslación del origen al sistema de coordenadas hacia el centro del círculo. La ecuación del círculo será:

$x^2+y^2=4$ girando alrededor de x=3

$$dV = 2\pi rhdr$$

$$dV = 2\pi(3-x)(2y)dx$$

$$V = 2\pi\int_{-2}^{2}(3-x)\left(2\sqrt{4-x^2}\right)dx$$

$$V = 4\pi\int_{-2}^{2}3\sqrt{4-x^2}dx\text{-}4\pi\int_{-2}^{2}x\sqrt{4-x^2}\,dx$$

$$V = 12\pi\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx\text{-}4\pi\int_{-2}^{2}x\sqrt{4-x^2}\,dx$$

$$Primera\ integral\text{:}\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx \quad Sea\text{:}\, x = 2Sent \to dx = 2Cost\ dt$$

$$Para\text{:}\, x = -2; t = \text{-}\frac{\pi}{2} \qquad x = 2; t = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{4-4Sen^2t}\ 2Cost\ dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{4(1-Sen^2t)}\ 2Cost\ dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}4Cot\ Cost\ dt$$

$$= 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2}Cos^2t\ dt = 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{2}(1+Cos2t)dt = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}dt + 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}Cos2t\ dt$$

$$= 2|t|\,_{-\pi/2}^{\pi/2} + 2\left|\frac{Sen\ 2t}{2}\right|\,_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2\left[\frac{\pi}{2}\text{-}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] + [Sen\pi\text{-}Sen(\text{-}\pi)] = 2\pi$$

$Segunda\ integral: \int_{-2}^{2} x\sqrt{4-x^2}\ dx \quad Sea: u = 4 - x^2 \rightarrow du = -2xdx \rightarrow dx = -\frac{du}{2x}$

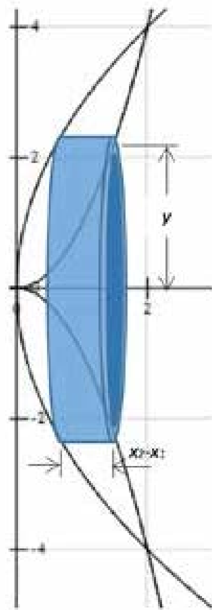
$= \int_{-2}^{2} x\sqrt{u} - \frac{du}{2x} = -\int_{-2}^{2} \sqrt{u}\ du = -\left| \frac{u^{3/2}}{3/2} \right|_{-2}^{2}$

$= -\frac{2}{3}\left|(4-x^2)^{3/2}\right|_{-2}^{2} = -\frac{2}{3}\left[(4-4)^{3/2} - (4-4)^{3/2}\right] = 0$

$V = 12\pi(\pi) = 12\pi^2\ u^3$

***12. Hallar el volumen del sólido que se genera al girar la región comprendida entre $y = x^2$ y $y = \sqrt{8x}$ alrededor del eje x en [0,3]***

Figura 23
Ejercicio propuesto 12 sobre Volúmenes



Calcular el punto de corte

$x^2 = \sqrt{8x} \ \rightarrow x^4 = 8x$

$x^3 = \sqrt{8} \ \rightarrow x = \pm 2 \ y \ 0$

$dV = 2\pi y(x_2\text{-}x_1)dy = 2\pi y\left(\sqrt{y}\text{-}\frac{y^2}{8}\right)dy$

$V = 2\pi \int_0^4 y\left(\sqrt{y}\, dy\text{-}\frac{2\pi}{8}\right)\int_0^4 y^3 \, dy$

$= 2\pi \int_0^4 y^{3/2}\, dy\text{-}\frac{\pi}{2}\int_0^4 y^3 \, dy$

$= 2\pi \left|\frac{y^{5/2}}{5/2}\right|\begin{matrix}4\\0\end{matrix}\text{-}\frac{\pi}{4}\left|\frac{y^4}{4}\right|\begin{matrix}4\\0\end{matrix}$

$= \frac{4}{5}\pi\left(4^{5/2}\right)\text{-}\frac{\pi}{16}(4^4) = \frac{4}{5}\pi(32)\text{-}\frac{\pi}{16}(256)$

$= \frac{128}{5}\pi\text{-}16\pi = \frac{48}{5}\pi \ u^3$

***13. Use el método de cilindros diferenciales huecos o casquetes para encontrar el volumen del sólido generado al rotar el área bajo la curva $y^2=3x^3$ alrededor del eje x en [0,3]***

$y^2 = x^3 \ \rightarrow \ \sqrt[3]{y^2} = x \text{ ó } \ y^{2/3} = x$

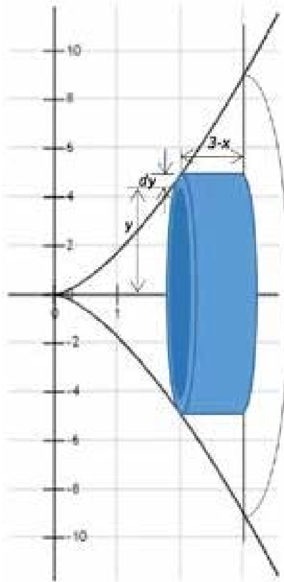
$Para: x = 3 \rightarrow y = \sqrt{3^3} = 3\sqrt{3}$

$dV = 2\pi y(3 - x)dy = 2\pi y(3 - y^{2/3})dy$

$V = \int_0^{3\sqrt{3}} 2\pi y\left(3 - y^{2/3}\right)dy = 2\pi \int_0^{3\sqrt{3}} (3y\text{-}y^{5/3})dy$

$V = 2\pi \int_0^{3\sqrt{3}} 3y \, dy\text{-}2\pi \int_0^{3\sqrt{3}} y^{5/3} \, dy$

Figura 24
Ejercicio propuesto 13 sobre Volúmenes



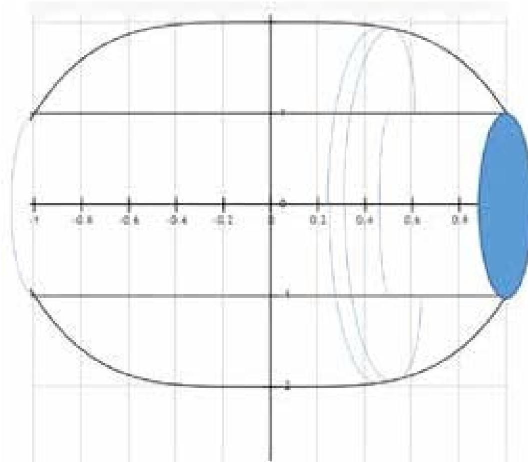

$$V = 6\pi \left|\frac{y^2}{2}\right|_{0}^{3\sqrt{3}} - 2\pi \left|\frac{y^{8/3}}{8/3}\right|_{0}^{3\sqrt{3}} = 3\pi\left[(3\sqrt{3})^2\right] - \frac{3}{4}\pi\left[(3\sqrt{3})^{8/3}\right]$$

$$= 3\pi(9 \cdot 3) - \frac{3}{4}\pi(3^{3/2})^{8/3} = 81\pi - \frac{3}{4}\pi\ 3^4 = 81\pi - \frac{243}{4}\pi = \frac{81}{4}\pi\ u^3$$

***14. Use el método más apropiado para calcular el volumen que se genera al girar el área comprendida entre y=2–x⁴ y y=1 alrededor del eje x***

$dV = \pi(y_2^2 - y_1^2)dx \qquad = \pi[(2 - x^4)^2 - 1^2]dx$

Figura 25
Ejercicio propuesto 14 sobre Volúmenes



Límites de Integración:

Para $y = 1,\ x = \pm 1$

$$V = \pi \int_{-1}^{1} [(2 - x^4)\text{-}1^2]dx$$

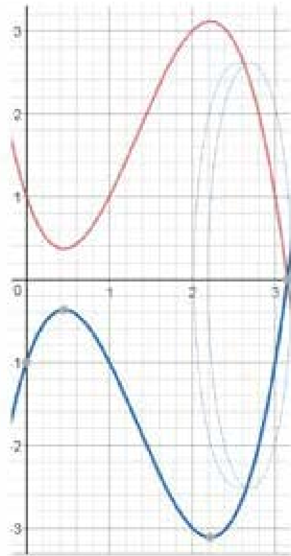
$$V = \pi \int_{-1}^{1} (4 - 4x^4 + x^8\text{-}1)dx$$

$$V = \pi \left[ 3|x| \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \text{-}4 \left| \frac{x^5}{5} \right| \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} + \left| \frac{x^9}{9} \right| \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \right]$$

$$= \pi[3(1 - (-1))]\text{-}4 \left[ \frac{1}{5} \text{-} \left( \text{-} \frac{1}{5} \right) \right] + \left[ \frac{1}{9} \text{-} \left( \text{-} \frac{1}{9} \right) \right] = \left( \pi(6)\text{-}4 \left( \frac{2}{5} \right) + \frac{2}{9} \right) = \frac{208}{45}\pi$$

*15. Use el método más apropiado para calcular el volumen que se genera al girar el área bajo la curva* $\boldsymbol{f(x) = \text{-}x^3 + 4x^2\text{-}3x + 1}$

Figura 26
Ejercicio propuesto 15 sobre Volúmenes



$$dV = \pi y^2 dx$$

$$V = \pi \int y^2 dx = \pi \int_0^3 (\text{-}x^3 + 4x^2\text{-}3x + 1)dx$$

$$= \pi \int_0^3 (x^6\text{-}8x^5 + 22x^4\text{-}26x^3 + 17x^2\text{-}6x + 1)dx$$

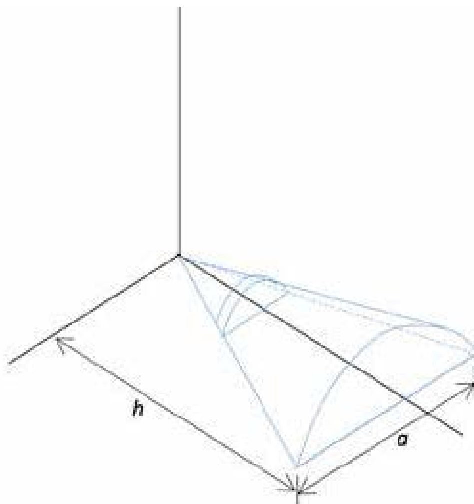
$$= \pi \left[\frac{x^7}{7}\right]\Bigg|_0^3 \text{-}8 \left|\frac{x^6}{6}\right|_0^3 + 22 \left|\frac{x^5}{5}\right|_0^3 \text{-}26 \left|\frac{x^4}{4}\right|_0^3 + 17 \left|\frac{x^3}{3}\right|_0^3 \text{-}6 \left|\frac{x^2}{2}\right|_0^3 + |x|_0^3 =$$

$$= \pi \left[\frac{3^7}{7} - \frac{4}{3}3^6 + \frac{22}{5}3^5 - \frac{13}{2}3^4 + \frac{17}{3}(3^2) - 3(9) + 3\right] = \frac{849}{70}\pi\ u^3$$

# Solución ejercicios propuestos sobre Volumen de Sección Recta Conocida

*1. Encontrar el volumen de un cono cortado por la mitad por un plano que pasa por su eje de simetría. La base del cono es un semicírculo de radio "a" y la altura del cono es "h"*

Figura 27
Ejercicio propuestos sobre volúmen de sección recta conocida




$$dV = \frac{1}{2}\pi\, r^2 dx$$

Observe que en el plano yz se forman dos triángulos rectángulos cuyos catetos son para el triángulo mayor, a y h y para el triángulo menor, r y x.

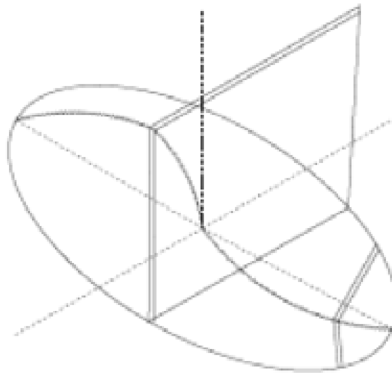
$$\frac{r}{x} = \frac{a}{h} \rightarrow r = \frac{a}{h}x$$

$$dV = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{a^2}{h^2}x^2\right)dx \quad V = \frac{1}{2}\pi\,\frac{a^2}{h^2}\int_0^h x^2dx = \frac{a}{2h}\pi\left|\frac{x^3}{3}\right|\begin{matrix} h \\ 0 \end{matrix} = \frac{a\pi}{2h}\cdot\frac{h^3}{3}$$

$$V = \frac{\pi}{6}a^2h$$

***2. Hallar el volumen de un sólido de base un círculo de radio r=4, sabiendo que la sección determinada en él por un plano perpendicular al diámetro es un cuadrado***

Figura 28
Ejercicio propuestos sobre volúmen de sección recta conocida



Ecuación del círculo de base: $x^2 + y^2 = 16$

Área del cuadrado perpendicular a la base:

$$A = (2y)(2y) = 4y^2$$

Despejando de la ecuación del círculo:

$y^2 = 16 - x^2 \quad A = 4(16 - x^2)$

$V = \int_0^4 4(16 - x^2)dx = \int_0^4 (64 - 4x^2)dx$

$V = 64|x| \begin{matrix} 4 \\ 0 \end{matrix} \text{-}4 \left| \frac{x^3}{3} \right| \begin{matrix} 4 \\ 0 \end{matrix} = 64(4)\text{-}\frac{4}{3}(4^3) = 256 - \frac{256}{3} = \frac{512}{3}$

Ya que los límites de integración fueron 0 y 4, el volument total será el doble

$V = 2\left(\frac{512}{3}\right) = \frac{1024}{3} \approx 341{,}33\, u^3$

***3. Encontrar el volumen de un sólido cuya base es la región entre una arcada de y=senx y el eje x. cada sección transversal perpendicular al eje x es un triángulo equilátero sobre la base***

Figura 29
Ejercicio propuestos sobre volúmen de sección recta conocida



$Lado\ del\ triángulo\ l = senx$

$altura\ del\ triángulo\ h = sen60°senx = \frac{\sqrt{3}}{2}senx$

$Área\ del\ triángulo\ A = \frac{bh}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}sen^2x$

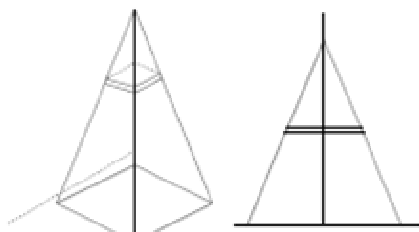
$Diferencial\ de\ volumen\ dV = \frac{\sqrt{3}}{2}sen^2xdx$

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^{\pi} Sen^2 x dx = \frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(1 - Cos2x)dx = \frac{\sqrt{3}}{8}\left[\int_0^{\pi} dx - \int_0^{\pi} Cos2xdx\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}\left(x\Big|_0^{\pi} - \frac{Sen2x}{2}\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{\sqrt{3}}{8}\left(\pi - (0-0)\right) = \frac{\sqrt{3}}{8}\pi\, u^3$$

## *4. Encontrar el volumen de una pirámide de base cuadrada de lado b y altura h*

Figura 30
Ejercicio propuestos sobre volúmen de sección recta conocida



$$dV = l^2 dy \rightarrow V = \int_0^h (2x)^2 dy$$

$Para\ poner\ x = f(y) y\ poder\ integrar:$

$La\ ecuación\ de\ la\ recta\ del\ lado\ de\ la$

$$pirámide\ es\ y = -\frac{h}{b/2}x + h$$

$$y = -\frac{2h}{b}x + h \rightarrow x = -(y-h)\frac{b}{2h}$$

$$x = -\frac{b}{2h}y + \frac{b}{2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{b}{h}y + b\right)$$

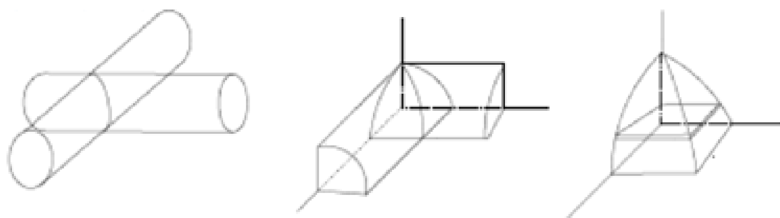
$$Reemplazando: V = \int_0^h \frac{4}{4}\left(-\frac{b}{h}y + b\right)^2 dy = \int_0^h \left(b^2 - 2\frac{b^2}{h}y + \frac{b^2}{h^2}y^2\right)dy$$

$$V = b^2|y|\begin{matrix} h \\ 0 \end{matrix} — 2\frac{b^2}{h}\left|\frac{y^2}{2}\right|\begin{matrix} h \\ 0 \end{matrix} + \frac{b^2}{h^2}\left|\frac{y^3}{3}\right|\begin{matrix} h \\ 0 \end{matrix} = b^2h — \frac{b^2h^2}{h} + \frac{1}{3}\frac{b^2}{h^2}h^3$$

$$= b^2h - b^2h + \frac{1}{3}b^2h = \frac{b^2h}{3}u^3$$

### *4. Calcular el volumen del sólido generado al intersecar dos cílindros rectos perpendiculares*

Figura 31
Ejercicio propuestos sobre volúmen de sección recta conocida



$$Como: z^2 + x^2 = r^2 \quad y \quad z^2 + y^2 = r^2$$

$$z^2 + x^2 = z^2 + y^2 \quad x^2 = y^2 \rightarrow x = y$$

$$dV = xydz = yydz$$

$$V = \int_0^r y^2\,dz \qquad y^2 = r^2\text{-}z^2$$

$$V = \int_0^r (r^2\text{-}z^2)dz$$

$$V = \int_0^r r^2dz\text{-}\int_0^r z^2dz = r^2|z|\begin{matrix} r \\ 0 \end{matrix}\text{-}\left|\frac{z^3}{3}\right|\begin{matrix} r \\ 0 \end{matrix} = r^3\text{-}\frac{r^3}{3} = \frac{2}{3}r^3$$

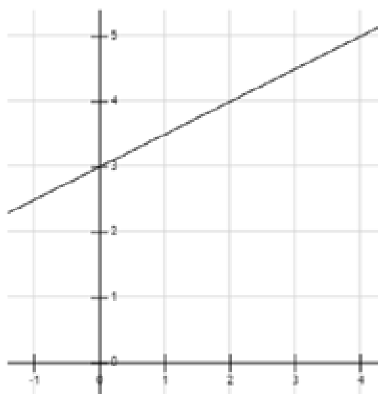
Como la sección representada es la octava parte del volumen total buscado, entonces,

$$Vt = 8\left(\frac{2}{3}r^3\right) = \frac{16}{3}r^3\,u^3$$

# Solución ejercicios propuestos sobre Cálculo de Longitud de Arco

*1. Encontrar la longitud de la curva* $\boldsymbol{y = \frac{1}{2}x + 3 \ en \ [0,4]}$ *. Compruebe ese resultado usando los conocimientos adquiridos en Geometría Analítica*

Figura 32
Ejercicio sobre Longitud de Arco



$$S = \int_0^4 \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2} \ dx =$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x + 3\right) = \frac{1}{2}$$

$$S = \int_0^4 \sqrt{1 + (\frac{1}{2})^2} \ dx = \int_0^4 \sqrt{\frac{5}{4}} \ dx = \sqrt{\frac{5}{4}} |x| \begin{matrix} 4 \\ 0 \end{matrix}$$

$$S = \sqrt{\frac{5}{4}}(4) = 2\sqrt{5}$$

Comprobación con la fórmula de la distancia:

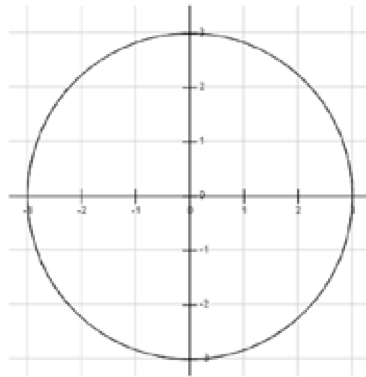
$$en\ x = 0; y = 3; en\ x = 4; y = 5$$

$$d = \sqrt{(y_2\text{-}y_1)^2 + (x_2\text{-}x_1)^2} = \sqrt{(5-3)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

$$d = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$$

***2. Calcular la longitud del arco de circunferencia de radio 3 que forma un ángulo de 60° con el eje x positivo. Comprobar la respuesta usando la fórmula para cálcular el arco de circunferenica conociendo ángulo y radio***

Figura 33
Ejercicio sobre Longitud de Arco



$$Si\ \theta = \frac{\pi}{3}: x = 3Cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

$$y = 3Sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$Ec. de\ la\ Circunferencia\ x^2+y^2 = 9 \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$S = \int_{3/2}^{3} \sqrt{1 + (-\frac{x}{y})^2}\, dx = \int_{3/2}^{3} \sqrt{\frac{y^2 + x^2}{y^2}}\, dx = \int_{3/2}^{3} \sqrt{\frac{9}{9 - x^2}}\, dx$$

$$S = \sqrt{9} \int_{3/2}^{3} \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}} = \sqrt{9} \left| arc\ Sen\left(\frac{x}{3}\right) \right|_{3/2}^{3} = 3\left[arc\ Sen(1)\text{-}arc\ Sen\left(\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= 3\left(\frac{\pi}{2}\text{-}\frac{\pi}{6}\right) = 3\left(\frac{4\pi}{6}\right) = \sqrt{9}\ \frac{2\pi}{3} =$$

Comprobar con la fórmula de arco de círculo $S = r\theta = 3\left(\frac{\pi}{3}\right) = \pi$

Note que la respuesta por integración es el doble que aplicando la fórmula. Esto se debe a que el arco calculado es el que forma entre $+\pi/3$ y $-\pi/3$.

Esto se puede comprobar integrando sobre "y".

$$S = \int_{0}^{3\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{(\frac{dx}{dy})^2 + 1}\ dy$$

Derivando con respecto "y"

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad 2x\frac{dx}{dy} + 2y = 0 \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x}$$

$$S = \int_{0}^{3\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{(-\frac{y}{x})^2 + 1}\ dy = \int_{0}^{3\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{\frac{y^2 + x^2}{x^2}}\ dy = \int_{0}^{3\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{\frac{9}{9 - y^2}}\ dy$$

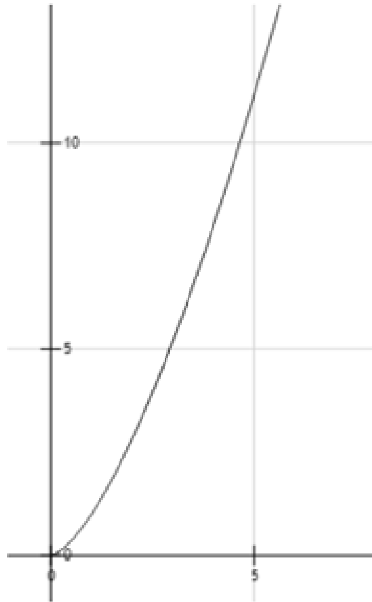
$$= 3\int_{0}^{3\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dy}{\sqrt{9 - y^2}} = 3\left|arc\ Sen\left(\frac{y}{3}\right)\right|_{0}^{3\frac{\sqrt{3}}{2}} = 3\left[arc\ Sen\frac{3\frac{\sqrt{3}}{2}}{3}\text{-}arc\ Sen\ 0\right] =$$

$$3\left(arc\ Sen\frac{\sqrt{3}}{2}\text{-}0\right) = 3\frac{\pi}{3} = \pi$$

Como se puede apreciar, integrando con respecto a y no fue necesario dividir para 2, la respuesta es directa.

*3. Hallar la longitud del arco de la curva* $y = \sqrt{x^3}$ *en [0,5]*

Figura 34
Ejercicio sobre Longitud de Arco




$$y = x^{3/2} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{1/2}$$

$$S = \int_0^5 \sqrt{1 + (\frac{3}{2}x^{1/2})^2}\ dx = \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\ dx$$

$$Sea: 1 + \frac{9}{4}x = z^2 \rightarrow x = \frac{4}{9}(z^2\text{-}1)dx = \frac{8}{9}z\,dz$$

$$S = \int_1^{7/2} z\left(\frac{8}{9}zdz\right) = \frac{8}{9}\int_1^{7/2} z^2dz = \frac{8}{9}\left|\frac{z^3}{3}\right|\begin{matrix}7/2\\1\end{matrix}$$

$$S = \frac{8}{27}\left[(\frac{7}{2})^3\text{-}1^3\right] = \frac{8}{27}\left(\frac{343}{8}\text{-}1\right)$$

Cambiando límites

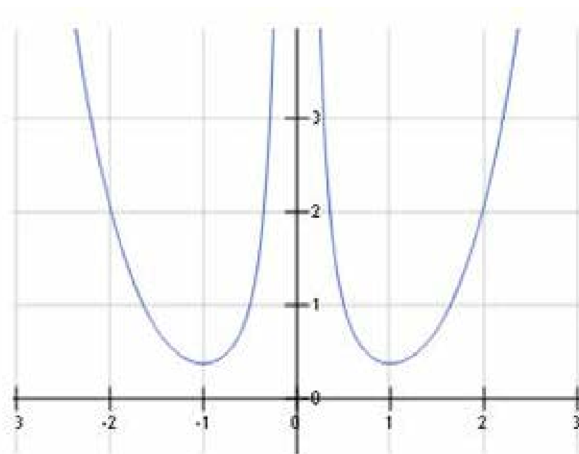
$$Para: x = 0; z = 1$$

$$x = 5; z = \frac{7}{2}$$

$$S = \frac{8}{27}\left(\frac{343 - 8}{8}\right) = \frac{335}{27} \approx 12.407$$

***4. Hallar la longitud del arco de la curva*** $y = \frac{x^4}{8} + \frac{x^{-2}}{4}$ ***[1/2, 2]***

Figura 35
Ejercicio sobre Longitud de Arco



$$y' = \frac{x^3}{2} - \frac{x^{-3}}{2} = \frac{1}{2}(x^3 - x^{-3})$$

$$S = \int_{1/2}^{2} \sqrt{1 + \left[\frac{1}{2}(x^3 - x^{-3})\right]} \, 2\, dx$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} \sqrt{1 + \frac{1}{4}(x^6 - 2x + x^{-4}) dx}$$

$$S = \int_{1/2}^{2} \frac{\sqrt{4 + x^6 - 2x + x^{-6}}}{4} dx$$

$$\int_{1/2}^{2} \frac{\sqrt{x^6 + 2 + x^{-6}}}{4} dx \rightarrow S = \int_{1}^{2} \frac{\sqrt{(x^3 + x^{-3})^2}}{4} dx = \frac{1}{2}\int_{1}^{2} (x^3 + x^{-3}) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}\Bigg|_1^2 + \frac{x^{-2}}{-2}\Bigg|_1^2\right] \rightarrow S = \frac{1}{2}\left[\frac{2^4 - (1)^4}{4} - \frac{2^{-2} - (1)^{-2}}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{16 - 1}{4} - \frac{\frac{1}{4} - 1}{2}\right]$$

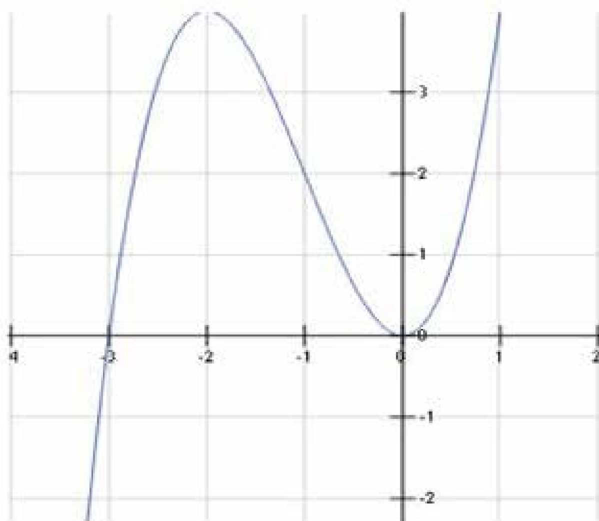
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{15}{4} - \left(-\frac{3}{8}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{30 + 3}{8}\right) = \frac{33}{16}$$

## *5. Hallar la longitud del arco de curva forma en [−3,1] de* $\boldsymbol{y = x^3 + 3x^2}$

$$S = \int_{-3}^{1} \sqrt{1 + (3x^2 + 6x)^2} \, dx$$

$$\int_{-3}^{1} \sqrt{1 + 9x^4 + 36x^3 + 36x^2} \; dx$$

Figura 36
Ejercicio sobre Longitud de Arco



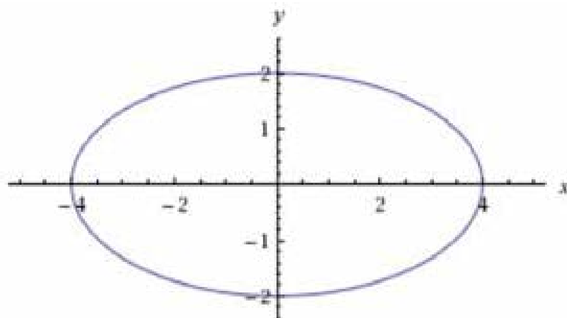

En este caso es mejor usar las técnicas de integración por aproximación, usando rectángulos vista al inicio de la sección del capítulo de integral definida, debido a la complejidad por el radical.

$S = 13.0371$

# Solución ejercicios propuestos sobre Cálculo de Áreas de Superficies de Revolución

***1. Encontrar el área de la superficie que envuelve el sólido generado al rotar la curva*** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ ***alrededor del eje x.***

Figura 37
Ejercicio sobre Área de Superficie de Revolución




$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$Ax = 2\pi \int y \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}\ d$$

$$y = 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{16}}\ \frac{dy}{dx}$$

$$= 2(1 - \frac{x^2}{16})1^{-1/2} \cdot \left(-\frac{x}{8}\right) \rightarrow y = \frac{1}{2}\sqrt{16 - x^2} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{16 - x^2}}$$

$$Ax = 2\pi \int_0^4 \frac{1}{2}\sqrt{16 - x^2} \sqrt{1 + (-\frac{x}{2\sqrt{16 - x^2}})^2}\, dx$$

$$= \pi \int_0^4 \sqrt{16 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{4(16 - x^2)}}\, dx = \pi \int_0^4 \sqrt{16 - x^2} \sqrt{\frac{64 - 4x + x^2}{4(16 - x^2)}}$$

$$= \pi \int_0^4 \sqrt{16 - x^2} \frac{\sqrt{64 - 3x^2}}{2\sqrt{16 - x^2}} = \frac{\pi}{2}\int_0^4 \sqrt{64 - 3x^2}\, dx$$

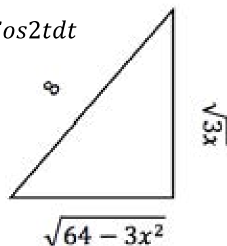
$$Sea: \sqrt{3x} = 8Sent; x = \frac{8}{\sqrt{3}}Sent\,; dx = \frac{8}{\sqrt{3}}Cot\, dt; Sent = \frac{\sqrt{3}x}{8}$$

$$\frac{\pi}{2}\int_0^4 \sqrt{614 - 3\frac{64}{3}Sen^2 t} \cdot \frac{8}{\sqrt{3}}\, Cot\, dt = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}\int_0^4 8Cos^2 t\, dt$$

$$\frac{32\pi}{\sqrt{3}}\int_0^4 \frac{1}{2}(1 + Cos2t)dt = \frac{16\pi}{\sqrt{3}}\int_0^4 dt + \frac{16\pi}{\sqrt{3}}\int_0^4 Cos2tdt$$

$$\frac{16\pi}{\sqrt{3}}|t|\,_0^4 + \frac{16\pi}{\sqrt{3}}\left|\frac{Sen2t}{2}\right|_0^4 \; Pero\ Sen2t = 2SentCost$$

$$\frac{16\pi}{\sqrt{3}}|t|\,_0^4 + \frac{16\pi}{\sqrt{3}}\left|\frac{2SentCost}{2}\right|_0^4$$




$$\frac{16\pi}{\sqrt{3}}\left|arcSen\left(\frac{\sqrt{3}x}{8}\right)\right|_0^4 + \frac{16\pi}{\sqrt{3}}\left|\frac{\sqrt{3}x}{8} \cdot \frac{64 - 3x^2}{8}\right|_0^4$$

$$\frac{16\pi}{\sqrt{3}}\left[arc\ Sen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - arc\ Sen(0)\right] + \frac{1}{64}\left[\sqrt{3}\,(4)\sqrt{64 - 3(16)} - 0\right]$$

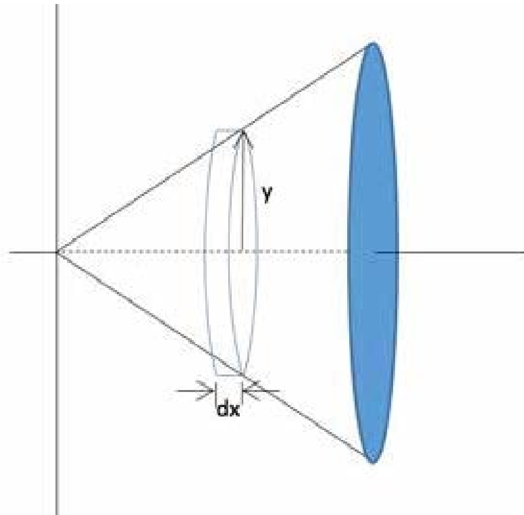
$$\frac{16\pi}{\sqrt{3}}\left[\frac{\pi}{3} + \frac{1}{64} \cdot 16\sqrt{3}\right] = \frac{16\pi^2}{3\sqrt{3}} + 4\pi = 42.96$$

El área total es el doble de ese valor al tomar en cuenta el lado izquierdo de la elipse

$AT = 85.91u^2$

***2. Hallar el área de la superficie generada en la rotación de y=mx alrededor del eje x en [0,2]. ¿Qué figura forma?***

Figura 38
Ejercicio sobre Área de Superficie de Revolución




$y = mx \quad \frac{dy}{dx} = m$

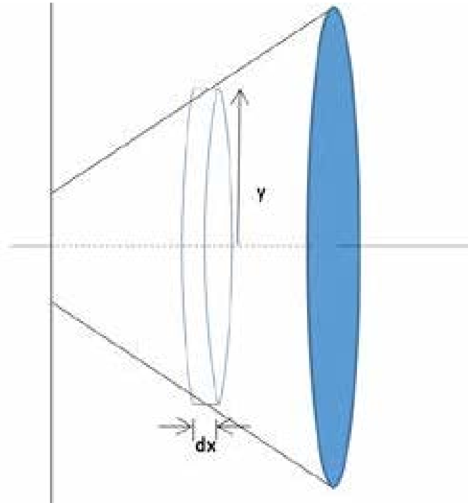
$$Ax = 2\pi \int_0^2 y\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}\, dx = 2\pi \int_0^2 mx\sqrt{1 + m^2}\, dx$$

$$= 2\pi\, m\sqrt{1 + m^2} \int_0^2 xdx = 2\pi\, m\sqrt{1 + m^2} \left|\frac{x^2}{2}\right| \begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix}$$

$$Ax = 2\pi\, m\sqrt{1+m^2}\left[\frac{4}{2}\right] = 4\pi\, m\sqrt{1+m^2} \text{ (área de lateral de un cono)}$$

***3. Calcular el área de la superficie generada en la rotación de y=mx+b alrededor del eje x en [0,2]. ¿Qué figura forma?***

Figura 39
Ejercicio sobre Área de Superficie de Revolución




$$y = mx + b \qquad \frac{dy}{dx} = m$$

$$Ax = 2\pi \int_0^2 y\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}\, dx = 2\pi \int_0^2 (mx+b)\sqrt{1+m^2}\, dx$$

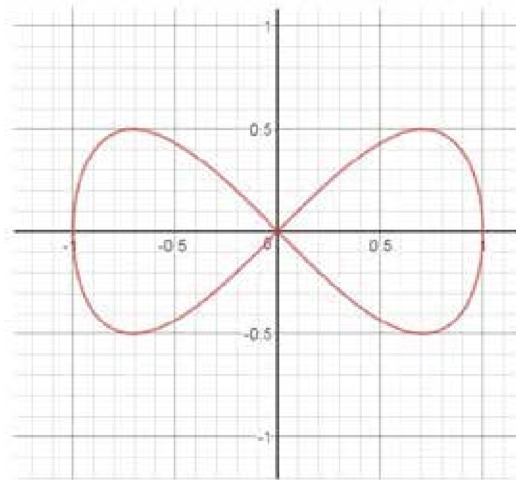
$$Ax = 2\pi\sqrt{1+m^2}\int_0^2 (mx+b)dx$$

$$Ax = 2\pi\sqrt{1+m^2}\left[m\left|\frac{x^2}{2}\right|\begin{matrix}2\\0\end{matrix} - b|x|\begin{matrix}2\\0\end{matrix}\right] = 2\pi\sqrt{1+m^2}(2m+2b)$$

$$Ax = 4\pi\,\sqrt{1+m^2}(m+b)\ (área\ lateral\ de\ un\ tronoco\ de\ cono)$$

## *4. Hallar el área de la superficie de revolución que se forma al rotar la curva $8y^2 = x^2\text{-}x^4$ sobre el eje x*

Figura 40
Ejercicio sobre Área de Superficie de Revolución




$$8y^2 = x^2\text{-}x^4 \to y = \sqrt{\frac{x^2\text{-}x^4}{8}}$$

$$y = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{8}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{8}}\left[x\ \frac{1}{2}(1-x^2 1)^{\text{-}1/2}(\text{-}2x) + \sqrt{1-x^2}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{8}}\left[\text{-}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{8}}\left(\frac{\text{-}x^2+1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{8}}\left(\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

Cálculo del intervalo:

$y = 0 \; en \; x^2(1 - x^2) = 0 \rightarrow x_1 = 0; \; x_2 = 1; x_3 = -1$

$$Ax = 2\pi \int_0^1 y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx = 2\pi \int_0^1 \frac{x\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{8}} \cdot \sqrt{1 + \left[\frac{1}{\sqrt{8}}\left(\frac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}\right)\right]^2} \, dx$$

$$Ax = 2\pi \int_0^1 \frac{x\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{8}\right) \cdot \frac{(1 - 2x^2)^2}{1 - x^2}} \, dx = 2\pi \int_0^1 \frac{x\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{8}}$$

$$\sqrt{\frac{8 - 8x^2 + 1 - 4x^2 + 4x^4}{8(1 - x^2)}} \, dx = 2\pi \int_0^1 \frac{x\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{8}} \, \frac{\sqrt{9 - 12x^2 + 4x^4}}{\sqrt{8}\,\sqrt{1 - x^2}} \, dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 \frac{x\sqrt{(3 - 2x^2)^2}}{8} = \frac{\pi}{4} \int_0^1 x(3 - 2x^2) dx = \frac{\pi}{4} \int_0^1 (3x\text{-}2x^3) dx$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[3 \left|\frac{x^2}{2}\right|_0^1 \text{-}2 \left|\frac{x^4}{4}\right|_0^1\right] = \frac{\pi}{4}\left(\frac{3}{2} \text{-} \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4} u^2$$

Como el área calculada es solo la del lado derecho, ya que la función es par, es decir, simétrica con respecto al eje y, entonces

$$AT = 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} u^2$$

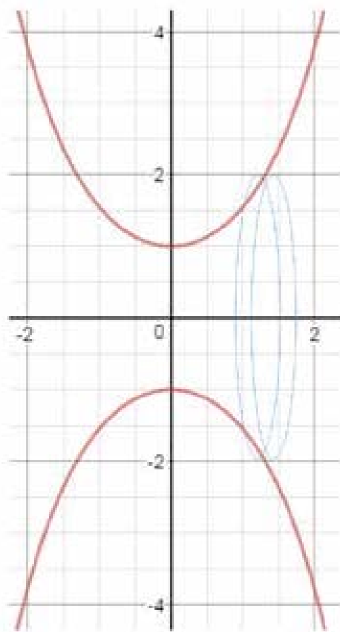
***5. Calcular el área de la superficie que se forma al girar alrededor del eje x la curva $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ en [−2,2]***

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad y = Coshx \quad y' = Senhx$$

$$Ax = 2\pi \int_{-2}^2 y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$= 2\pi \int_{-2}^{2} Coshx\sqrt{1 + Senh^2x}\ dx$$

Figura 41
Ejercicio sobre Área de Superficie de Revolución




Usando las identidades de funciones hiperbólicas:

$$Cosh^2x\text{-}Senh^2x = 1$$

$$Ax = 2\pi \int_{-2}^{2} Coshx\sqrt{Cosh^2x}\ dx = 2\pi \int_{-2}^{2} Cosh^2x\, dx$$

$$Ax = 2\pi \int_{-2}^{2} \frac{1}{2}(Cosh2x + 1)dx = \pi\left[\int_{-2}^{2} Cosh2x\, dx + \int_{-2}^{2} dx\right]$$

$$Sea: 2x = u \rightarrow du = 2dx \rightarrow dx = \frac{du}{2}$$

$$= \pi \left[\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} Cosh\, u\, du + \int_{-2}^{2} dx\right] = \pi \left[\frac{1}{2}|Senh2x|\begin{matrix}2\\-2\end{matrix} + |x|\begin{matrix}2\\-2\end{matrix}\right]$$

$$= \pi \left\{\frac{1}{2}[Senh(4)\text{-}Senh(-4)] + (2+2)\right\} = \pi \left\{\frac{1}{2}[27.29 - (-27.29)] + 4\right\}$$

$$= 98.30\ u^2$$

# Solución ejercicios propuestos sobre Trabajo

***1. Se conoce que para estirar 1 cm un resorte de 12 cm de largo en estado natural, se requiere 80N. Calcular el trabajo necestiado para estirarlo: a) desde 12 a 15 cm b) desde 15 a 16 cm.***

$$a)K = \frac{80N}{0{,}01m} = 8000\frac{N}{m}$$

$$T = \int_{0,00}^{0,03} F(x)dx = \int_{0,00}^{0,03} Kxdx = 8000\left|\frac{x^2}{2}\right|\begin{matrix}0{,}03\\0{,}00\end{matrix} = 4000(0{,}03^2) = 3.6N \cdot m = 3.6J$$

$$b)T = \int_{0,03}^{0,04} 8000xdx = 8000\left|\frac{x^2}{2}\right|\begin{matrix}0{,}04\\0{,}03\end{matrix} = 4000[0{,}04^2\text{-}0{,}03^2] = 2.8J$$

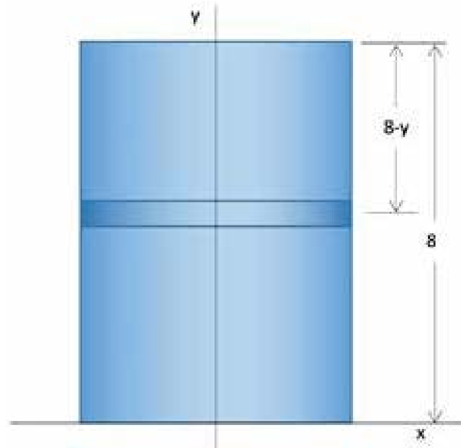
***2. Un tanque de forma cilíndrica de 5m de diámetro y 8m de profundidad, está llena de agua (1000 kp/m³). Calcular el trabajo para bombear el agua hasta el borde superior de la cisterna***

$$dP = \gamma dv = \pi x^2 dy$$

$$dT = \gamma\pi x^2(8 - y)dy \quad T = \int_0^8 \gamma\pi x^2(8 - y)dy$$

$$Como\ x = 2.5\ para\ todo\ y$$

Figura 42
Ejercicio sobre Trabajo




(ecuación de una recta vertical)

$$T = 6.25\pi\gamma \int_0^8 (8-y)dy = 6.25\gamma\pi \left[\int_0^8 8dy \text{-} \int_0^8 ydy\right]$$

$$T = 6.25\pi\gamma \left[8|y| \begin{matrix} 8 \\ 0 \end{matrix} \text{-} \left|\frac{y^2}{2}\right| \begin{matrix} 8 \\ 0 \end{matrix}\right] = 6.25\gamma\pi(64-32)$$

$$= 6.25(1000)(\pi)(32) = 200.000\pi$$

***3. Si el tanque del problema 2 tiene agua hasta los 5m de profundidad. Calcule el trabajo para bombear el agua igualmente hasta el borde del tanque***

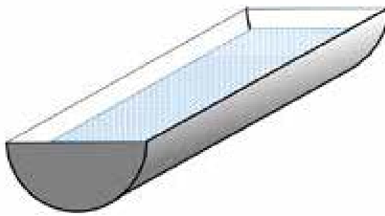
$$dP = \gamma dv = \pi x^2 dy = \pi(2.5)^2 dy = 6.25\pi dy$$

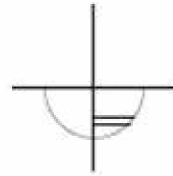
$$T = \gamma\pi(6.25) \int_0^5 (8-y)dy = 6.25\gamma\pi \left[8y \left| \begin{matrix} 5 \\ 0 \end{matrix} \text{-} \frac{y^2}{2} \right| \begin{matrix} 5 \\ 0 \end{matrix}\right]$$

$$= 6.25\gamma\pi\left[40 - \frac{25}{2}\right] = 171875\pi$$

***4. Calcular el trabajo necesario para llevar agua hasta el extremo superior del depósito de la figura 35. El largo del tanque es 50p y el diámetro es 20p, suponiendo que dicho recipiente se encuentra 7p lleno.***

Figura 43
Ejercicio sobre Trabajo





$$dP = \gamma dv = [\gamma \; x \; dy(50)]$$

$$dP = 50\gamma\sqrt{100 - y^2}dy$$

$$T = 2(50\gamma)\int_{-10}^{-3}\left(\sqrt{100 - y^2}dy\right)(-y)$$

$$T = -980000\int_{-10}^{-3} y\sqrt{100 - y^2}dy$$

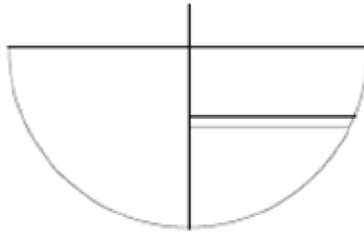
$$Sea: u = 100 - y^2 \rightarrow du = -ydy \rightarrow ydy = -\frac{du}{2}$$

$$T = -9800\int_{-10}^{-3}\frac{1}{2}\,u^{1/2}du = -4900\left(\frac{u^{3/2}}{3/2}\right) = -3266,67\left|\sqrt{(100 - y^2)^3}\right|_{-10}^{-3}$$

$$= 1805,62 \; tb\text{-}p$$

*5. Un tanque semiesférico está lleno de petróleo. Calcular el trabajo nece– sario para llevar todo el petróleo hasta la superficie*

Figura 44
Ejercicio sobre Trabajo



$$x^2 + y^2 = 100$$

$$x^2 = \sqrt{100 - y^2}$$

$$dP = \gamma dv = \gamma\pi x^2 dy$$

$$dT = \int_{-10}^{0} \gamma\pi x^2 dy(-y) = -\gamma\pi \int_{-10}^{0} x^2 y dy$$

$$= -\gamma\pi \int_{-10}^{0} y\sqrt{100 - y^2} dy$$

$$Sea: u = 100 - y^2 \rightarrow du = -2ydy \rightarrow ydy = -\frac{du}{2}$$

$$dT = -\gamma\pi \int_{-10}^{0} u^{1/2}\left(-\frac{du}{2}\right) = \gamma\frac{\pi}{2}\int_{-10}^{0} u^{1/2}\,du = \frac{\gamma\pi}{2}\left|\frac{u^{3/2}}{3/2}\right|\begin{matrix}0\\-10\end{matrix}$$

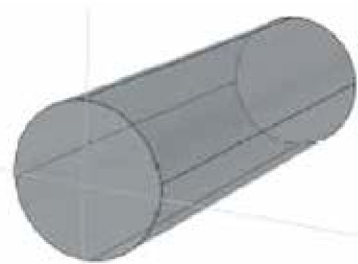
$$dT = \frac{\gamma\pi}{2}\left|\frac{(100 - y^2)^{3/2}}{3/2}\right|\begin{matrix}0\\-10\end{matrix} = \frac{\gamma\pi}{3}((\sqrt{(100 - 0^2)^3}-\sqrt{(100 - (-10)^2)^3})$$

$$= \frac{\gamma\pi}{3}\sqrt{1'000.000} = \frac{800\,000\pi}{3}$$

# Solución ejercicios propuestos sobre Fuerza Ejercida por un Líquido

***1. Un tanque con forma cilíndrica circular recta con petróleo hasta la mitad de su altura descansa sobre el lado circular como muestra la figura. Las medidas del tanque son: 8p de diámetro y 24p de longitud. Determine la fuerza total ejercida por el fluido contra una de las caras circulares. (peso específico del petróleo 50 lb/p³)***

Figura 45
Ejercicio sobre Fuerza ejercida por un líquido



$$dF = \gamma dAh = \gamma(2ydx)x$$

$$F = \int 2\gamma yxdx = 2\,\gamma \int_0^4 x\sqrt{16 - x^2}\ dx$$

$$Sea: u = 16 - x^2 \rightarrow du = -2xdx \rightarrow xdx = -\frac{du}{2}$$

$$F = 2\gamma \int_0^4 u^{1/2} \left(-\frac{du}{2}\right) = -\frac{2\gamma}{2} \int_0^4 u^{1/2}\, du$$

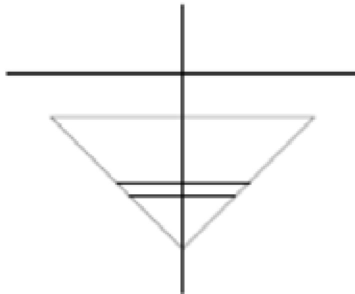
$$= -\gamma \left| \frac{u^{3/2}}{3/2} \right|_0^4 = -\frac{2\gamma}{3} \left| u^{3/2} \right|_0^4 = -\frac{2}{3}\gamma \left| \sqrt{(16-x^2)^3} \right|_0^4$$

$$= -\frac{2}{3}\left(50\frac{lb}{p^3}\right)\left[\sqrt{(16-16)^3}-\sqrt{(16-0)^3}\right] = -\frac{100}{3}\left[\left(-\sqrt{16^3}\right)\right] = -\frac{100}{3}\sqrt{16^2 \cdot 16}$$

$$= \frac{100}{3}(16)(4) = \frac{6400}{3} = 2133.33\ lb$$

***2. Calcular la fuerza que ejerce el agua sobre la superficie triangular sumer–gida de lados 5m, 5m, 8m con el lado mayor estando paralelo a la superficie del líquido y situado 3m por debajo del nivel*** $(\boldsymbol{\gamma_{H20} = 1000\ kp/m^3})$

Figura 46
Ejercicio sobre Fuerza ejercida por un líquido



Para simplificar el problema, el eje x será positivo hacia abajo y el eje y será positivo hacia la derecha.

Cálculo de la coordenada del vértice inferior

$$x = 3 + \sqrt{5^2-4^2} = 3 + \sqrt{9} = 6\ (Pitágora)$$

Ec. de la Recta que pasa por el cateto sobre el eje x

$$y-0 = \frac{4-0}{3-6}(x-6) \rightarrow y = -\frac{4}{3}(x-6)$$

$$y_2 = -\frac{4}{3}x + 8$$

Ec. de la Recta que pasa por el cateto bajo el eje x.

$$y\text{-}0 = \frac{0 - (-4)}{6 - 3}(x\text{-}6) \rightarrow y_1 = \frac{4}{3}x\text{-}8$$

$$df = \gamma dAh = \gamma\big((y_2\text{-}y_1)dx\big)x \rightarrow F = \gamma\int_3^6 (y_2\text{-}y_1)\,xdx$$

$$y_2\text{-}y_1 = -\frac{4}{3}x + 8 - \left(\frac{4}{3}x\text{-}8\right) = -\frac{4}{3}x + 8 - \frac{4}{3} + 8 = -\frac{8}{3}x + 16$$

$$F = \gamma\int_3^0 \left(-\frac{8}{3}x + 16\right)xdx = \gamma\left[\int_3^6 \left(-\frac{8}{3}x^2dx\right) + \int_3^6 16xdx\right]$$

$$= \gamma\left[-\frac{8}{3}\left|\frac{x^3}{3}\right|_3^6 + 16\left|\frac{x^2}{2}\right|_3^6\right] = \gamma\left[-\frac{8}{9}(6^3\text{-}3^3) + 8(6^2\text{-}3^2)\right]$$

$$= \gamma\left[-\frac{8}{9}(189) + 8(27)\right] = \gamma(-168 + 216) = 48\gamma = 48000Kp.$$

***3. Determine la fuerza ejercida por el agua sobre una compuerta circular de 4p de radio cuyo lado superior se encuentra 2p por debajo del nivel del agua (peso específico del agua 62.4 lb/$p^3$)***

Igual que el ejercicio anterior, el eje x es positivo hacia abajo y el eje y, positivo hacia la derecha.

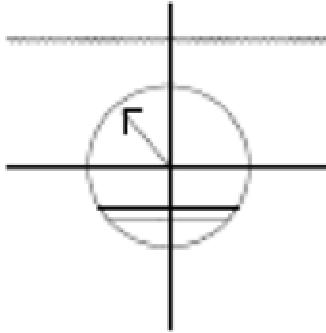
$$dF = \gamma dA(6 + x) = \gamma(2ydx)(6 + x)$$

$$= 2\gamma\sqrt{16 - x^2}(6 + x)dx$$

$$F = 2\gamma\int_{-4}^{4}\sqrt{16 - x^2}(6 + x)dx$$

$$F = 2\gamma\left[6\int_{-4}^{4}\sqrt{16-x^2}(6+x)dx + \int_{-4}^{4}x\sqrt{16-x^2}dx\right]$$

Figura 47
Ejercicio sobre Fuerza ejercida por un líquido




Haciendo las siguientes sustituciones en la primera integral:

$x = 4Sent \rightarrow dx = 4Cost\ dt$

*Segunda integral*

$u = 16 - x^2 \rightarrow du = -2xdx \rightarrow xdx = -\frac{du}{2}$

Haciendo los cambio de límites para la 1era Integral:

$Para{:}\ x = -4; -4 = 4Sent\ \rightarrow -1 = Sent \rightarrow t = -\frac{\pi}{2}$

$Para{:}\ x = 4; 4 = 4Sent\ \rightarrow 1 = Sent \rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

$$F = 2\gamma\left[6\int_{-4}^{4}\sqrt{16-16Sen^2t}\cdot 4Cost\ dt + \int_{-4}^{4}u^{1/2}\left(-\frac{du}{2}\right)\right]$$

$$F = 2\gamma\left[6\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{16(1-Sen^2t)}\cdot 4Cost\ dt\text{-}\frac{1}{2}\int_{-4}^{4}u^{1/2}du\right]$$

$$= 2\gamma\left[6\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{16Cos^2t}\cdot 4Cost\ dt\text{-}\frac{1}{2}\left|\frac{u^{3/2}}{3/2}\right|_{-4}^{4}\right]$$

$$= 2\gamma\left[6\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4Cost\cdot 4Cot\ dt\text{-}\frac{1}{3}\left|u^{3/2}\right|_{-4}^{4}\right]$$

$$= 2\gamma\left[96\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}Cos^2t dt\text{-}\frac{1}{3}\left|\sqrt{(16-x^2)^3}\right|_{-4}^{4}\right]$$

$$= 2\gamma\left[96\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(1+Cos2t)dt\text{-}\frac{1}{3}\left[\sqrt{(16-16)^3}\text{-}\sqrt{(16-16)^3}\right]\right]$$

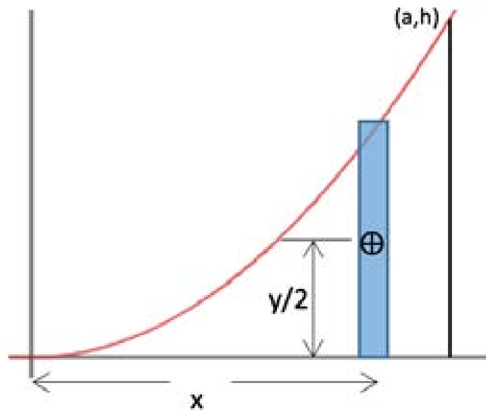
$$= 96\gamma\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}dt+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}Cos2t\ dt\right] = 96\gamma\left[|t|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+\left|\frac{Sen2t}{2}\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right]$$

$$F = 96\gamma\left[\left(\frac{\pi}{2}\text{-}\left(\text{-}\frac{\pi}{2}\right)\right)+\frac{1}{2}(0-0)\right] = 96\gamma\pi = 18819\ lb$$

# Solución de ejercicios propuestos sobre Centroides y Momento de Inercia

***1. Encontrar una fórmula que sirva para encontrar la posición del centroide de la enjuta parabólica dada en forma general por $y=kx^2$ desde el punto (0,0) hasta el punto (a,h)***

Figura 48
Ejercicio sobre Centroide




$$\bar{x} = \frac{\int_0^a xy\,dx}{\int_0^a y\,dx} = \frac{\int_0^a xkx^2 dx}{\int_0^a kx^2 dx} = \frac{\left|\frac{x^4}{4}\right|_0^a}{\left|\frac{x^3}{3}\right|_0^a}$$

$$= \frac{3}{4}\frac{a^4}{a^3} = \frac{3}{4}a$$

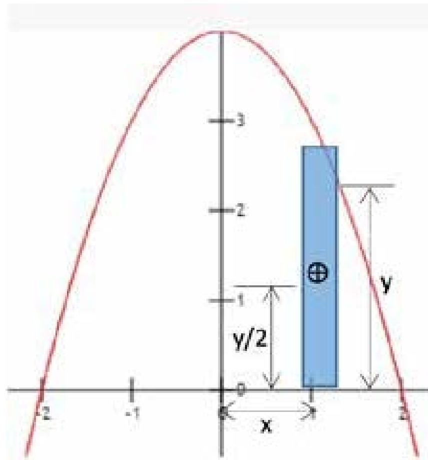
$$\bar{y} = \frac{\int_0^a \frac{y}{2} y\, dx}{\int_0^a y\, dx} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^a y^2 dx}{\int_0^a y dx} = \frac{1}{2}\frac{\int_0^a k^2 x^4 dx}{\int_0^a k x^2 dx} = \frac{1}{2}\frac{k^2 \left|\frac{x^5}{5}\right|_0^a}{k\left|\frac{x^3}{3}\right|_0^a}$$

$$= \frac{1}{2}k\frac{\frac{a^5}{5}}{\frac{a^3}{3}} = \frac{1}{2}k\frac{3}{5}a^2 = \frac{3}{10}ka^2 \; Pero \; ka^2 = h$$

$$\bar{y} = \frac{3}{10}h$$

***2. Encuentre el centroide del área bajo la curva de la parábola y=4−x² en [−2,2].***

Figura 49
Ejercicio sobre Centroide




$$\bar{x} = \frac{\int_{-2}^{2} xy\, dx}{\int_{-2}^{2} y\, dx} = \frac{\int_{-2}^{2} x(4-x^2)dx}{\int_{-2}^{2}(4-x^2)\, dx} = \frac{\int_{-2}^{2}(4x\text{-}x^3)dx}{\int_{-2}^{2}(4-x^2)dx}$$

$$\bar{x} = \frac{4\left|\frac{x^2}{2}\right|_{-2}^{2} - \left|\frac{x^4}{4}\right|_{-2}^{2}}{4|x|_{-2}^{2} - \left|\frac{x^3}{3}\right|_{-2}^{2}} = \frac{2(4-4) - \frac{1}{4}(16-16)}{4[2-(-2)] - \frac{1}{3}[8-(-8)]} = 0$$

$$\bar{y} = \frac{\int_{-2}^{2} \frac{y}{2} y\, dx}{\int_{-2}^{2} y\, dx} = \frac{1}{2}\frac{\int_{-2}^{2} y^2\, dx}{16 - \frac{16}{3}} = \frac{1}{2}\frac{\int_{-2}^{2} (4-x^2)^2\, dx}{32/3}$$

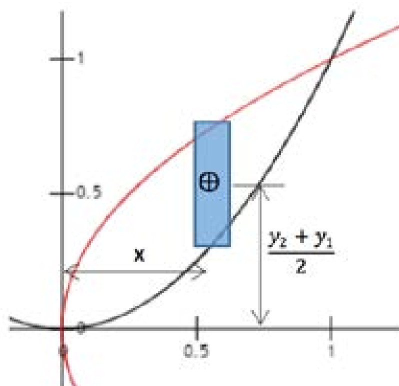
$$= \frac{1}{2}\frac{\int_{-2}^{2}(16 - 8x^2 + x^4)dx}{32/3} = \frac{1}{2}\frac{16|x|_{-2}^{2} - 8\left|\frac{x^3}{3}\right|_{-2}^{2} + \left|\frac{x^5}{5}\right|_{-2}^{2}}{32/3}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{16[2-(-2)] - \frac{8}{3}[2^3 - (-2)^3] + \frac{1}{5}[2^5 - (-2)^5]}{32/3} = \frac{8}{5}$$

El centroide se encuentra en (0, 8/5) ubicado sobre el eje y como se esperaba por ser una funcion simetrica con respecto al eje y.

### *3. Encontrar el centroide del área encerrada por las curvas* $y = \sqrt{x}; y = x^2$

Figura 50
Ejercicio sobre Centroide



Puntos de intersección:

$$\sqrt{x} = x^2 \quad x = x^4 \rightarrow x^4\text{-}x = 0 \quad x(x^3\text{-}1) = 0$$

$$x_1 = 0 \rightarrow x_2 = 1 \qquad y_1 = 0 \rightarrow y_2 = 1$$

$$\bar{x} = \frac{\int xdA}{\int dA} = \frac{\int_0^1 x(y_2\text{-}y_1)dx}{\int_0^1 (y_2\text{-}y_1)dx} = \frac{\int_0^1 x(\sqrt{x}\text{-}x^2)dx}{\int_0^1 (\sqrt{x}\text{-}x^2)dx}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^1 (x^{3/2}\text{-}x^3)dx}{\int_0^1 (x^{1/2}\text{-}x^2)dx} = \frac{\left|\frac{x^{5/2}}{5/2}\right|_0^1 \text{-} \left|\frac{x^4}{4}\right|_0^1}{\left|\frac{x^{3/2}}{3/2}\right|_0^1 \text{-} \left|\frac{x^3}{3}\right|_0^1} = \frac{\frac{2}{5}(1)\text{-}\frac{1}{4}(1)}{\frac{2}{3}(1)\text{-}\frac{1}{3}(1)} = \frac{\frac{8-5}{20}}{\frac{1}{3}}$$

$$\bar{x} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{20}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_0^1 \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)(y_2\text{-}y_1)dx}{\int_0^1 dA} = \frac{\int_0^1 \left(\frac{\sqrt{x} + x^2}{2}\right)(\sqrt{x}\text{-}x^2)dx}{1/3}$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^1 \left(x\text{-}x^2\sqrt{x} + x^2\sqrt{x}\text{-}x^4\right)dx$$

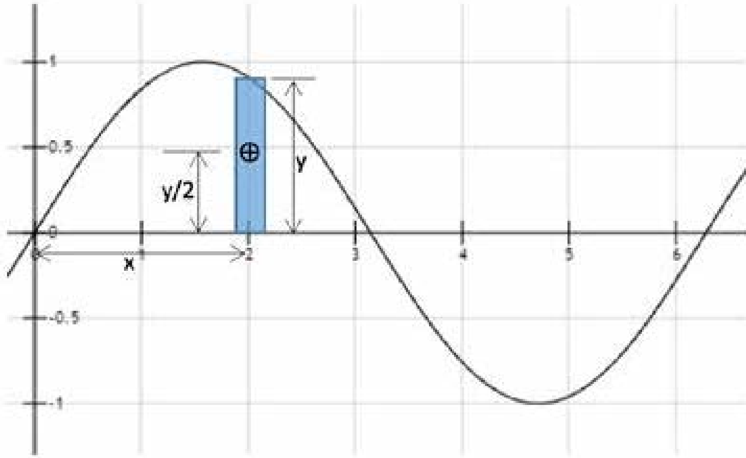
$$\bar{y} = \frac{3}{2}\int_0^1 (x\text{-}x^4)dx = \frac{3}{2}\left[\left|\frac{x^2}{2}\right|_0^1 \text{-} \left|\frac{x^5}{5}\right|_0^1\right] = \frac{3}{2}\left[\frac{1}{2}\text{-}\frac{1}{5}\right] = \frac{3}{2}\left(\frac{5-2}{10}\right)$$

$$\bar{y} = \frac{9}{20} \qquad C\left(\frac{9}{20}, \frac{9}{20}\right)$$

### *4. Encontrar el centroide del área bajo la curva y=senx en [0,π]*

$$\bar{x} = \frac{\int_0^\pi x\,dA}{\int_0^\pi dA} = \frac{\int_0^\pi xy\,dx}{\int_0^\pi ydx} = \frac{\int_0^\pi xSenx\,dx}{\int_0^\pi Senx\,dx}$$

Figura 51
Ejercicio sobre Centroide




$Sea: u = x \rightarrow du = dx \qquad dv = Senx\, dx \rightarrow v = \text{-}Cosx$

$$\int_0^{\pi} xSenxdx = |\text{-}xCosx|\begin{matrix}\pi\\0\end{matrix} \text{-} \int (\text{-}Cosx)dx = \text{-}xCosx\left|\begin{matrix}\pi\\0\end{matrix}\right. + Senx\left|\begin{matrix}\pi\\0\end{matrix}\right.$$

$$= [\text{-}\pi(\text{-}1)\text{-}0] + [0] = \pi$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} ydx = \int_0^{\pi} Senxdx = \text{-}Cosx\left|\begin{matrix}\pi\\0\end{matrix}\right. = \text{-}(\text{-}1)\text{-}(\text{-}1) = 2$$

$$\bar{x} = \frac{\pi}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{\int \frac{y}{2}\, dA}{\int dA} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^{\pi} yydx}{\int_0^{\pi} ydx} = \frac{1}{2}\frac{\int_0^{\pi} y^2dx}{\int_0^{\pi} ydx} = \frac{1}{2}\frac{\int_0^{\pi} Sen^2xdx}{\int_0^{\pi} Senxdx}$$

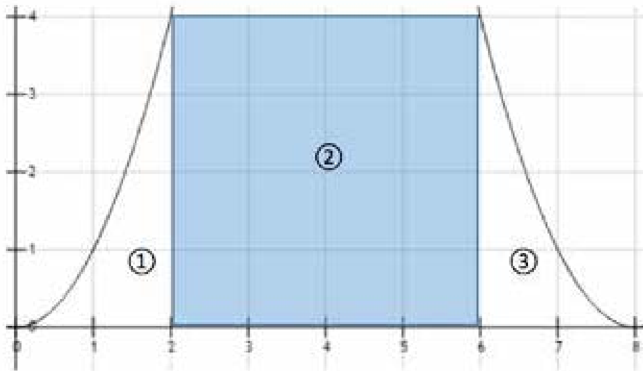
$$= \frac{1}{2}\frac{\int_0^{\pi} \frac{1}{2}(1 - Cos2x)dx}{\int_0^{\pi} Senxdx} = \frac{1}{4}\frac{\int_0^{\pi} dx \text{-} \int_0^{\pi} Cos2xdx}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\frac{x\Big|_0^{\pi} - \frac{Sen2x}{2}\Big|_0^{\pi}}{2} = \frac{1}{4}\frac{\pi - \frac{1}{2}[0]}{2} = \frac{\pi}{8}$$

## *5. Encontrar el centroide del área de la figura*

Se divide el área en 3 zonas y se encuentra el centroide para cada una de ellas

Figura 52
Ejercicio sobre Centroide




Área 1

$$\bar{x} = \frac{\int_0^2 xydx}{\int_0^2 ydx} = \frac{\int_0^2 xx^2dx}{\int_0^2 x^2dx} = \frac{\int_0^2 x^3dx}{\int_0^2 x^2dx} = \frac{\left|\frac{x^4}{4}\right|_0^2}{\left|\frac{x^3}{3}\right|_0^2} = \frac{3}{4}\cdot\frac{2^4}{2^3} = \frac{3}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_0^2 \frac{1}{2}yydx}{\int_0^2 ydx} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^2 y^2dx}{\int_0^2 ydx} = \frac{1}{2}\frac{\int_0^2 x^4dx}{\int_0^2 x^2dx} = \frac{1}{2}\frac{\left|\frac{x^5}{5}\right|_0^2}{\left|\frac{x^3}{3}\right|_0^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} = \frac{2^5}{2^3} = \frac{6}{5}$$

$$C_1: \left(\frac{3}{2}, \frac{6}{5}\right)$$

Ya que el área 3 es simétrica al área 1, las coordenadas del centroide son

$$C_1\!:\left(8-\frac{3}{2},\frac{6}{5}\right)=\left(\frac{13}{2},\frac{6}{5}\right)$$

Las coordenadas del centroide del área 2 por ser rectángulo son

$$C_2(4,2)$$

Las coordenadas de las 3 áreas en conjunto son:

$$\bar{x}=\frac{\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{8}{3}\right)+(4)(8)+\left(\frac{13}{2}\right)\left(\frac{8}{3}\right)}{\frac{8}{3}+8+\frac{8}{3}}=4$$

$$\bar{y}=\frac{\left(\frac{6}{5}\right)\left(\frac{8}{3}\right)+(2)(8)+\left(\frac{6}{5}\right)\left(\frac{8}{3}\right)}{\frac{8}{3}+8+\frac{8}{3}}=\frac{42}{25}$$

# Solución de ejercicios propuestos sobre Ecuaciones Paramétricas

## Ecuaciones Paramétricas

### *1. Encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por P(5,3) y Q(8,2)*

$x = x_1 + (x_2\text{-}x_1)t \rightarrow x = 5 + (8-5)t \rightarrow x = 5 + 3t$

$y = y_1 + (y_2\text{-}y_1)t \rightarrow y = 3 + (2-3)t \rightarrow y = 3 - t$

### *2. Parametrizar la curva 4x+y–5=0*

Se trata de una recta. Se sabe que las ecuaciones paramétricas de una recta son:

$x = x_0 + t(x_1\text{-}x_0)$

$y = y_0 + t(y_1\text{-}y_0)$

Para parametrizar se necesitan dos puntos conocidos de la recta que se los puede encontrar haciendo x=0 y luego y=0

$Para\ x = 0 \quad 4(0) + y\text{-}5 = 0 \rightarrow y = 5\ El\ primer\ punto\ es\ (0{,}5)$

$Para\ y = 0 \quad 4x + 0 - 5 = 0 \rightarrow y = \frac{5}{4}\ El\ segundo\ puento\ es\ \left(\frac{5}{4}, 0\right)$

Aplicando las ecuaciones paramétricas y despejando t

$x = \frac{5}{4} + t\left(0 - \frac{5}{4}\right) \rightarrow x = \frac{5}{4} - \frac{5}{4}t$

$y = 0 + t(5 - 0) \rightarrow y = 5t$

### *3. Encontrar las ecuaciones paramétricas del círculo cuyo centro está en (2,–5) y el radio es 6*

Las ecuaciones paramétricas del círculo son:

$x = h + rCost \rightarrow x = 2 + 6Cost$

$y = k + rSent \rightarrow y = -5 + 6Sent$

### *4. Parametrizar el círculo*

$\mathbf{9x^2 + 9y^2 + 72x - 12y + 103 = 0}$

$9x^2 + 72x + 9y^2 - 12y = -103$

$9(x^2 + 8x + 16) + 9\left(y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{4}{9}\right) = -103 + 144 + 4$

$9(x + 4)^2 + 9(y - \frac{2}{3})^2 = 45$

$(x + 4)^2 + (y - \frac{2}{3})^2 = \frac{45}{9}$ $\qquad$ $(x + 4)^2 + (y - \frac{2}{3})^2 = 5$

$x = -4 + \sqrt{5}\,Cost$

$y = \frac{2}{3} + \sqrt{5}\,Sent$

### *5. Parametrizar la parábola* $\mathbf{x = y^2 - 12y + 25}$

La variable que está elevada a la segunda potencia se la toma como parámetro

$y = t$

$x = t^2 \text{-} 12t + 25$

***6. Convertir las siguientes ecuaciones paramétricas de rectangulares a cartesianas:*** $\boldsymbol{x = t; y = \frac{1}{2}t^2 + 5t \text{-} 16}$

Ya que el parámetro t es al a vez la variable x, entonces se puede reemplazar t por x en la segunda ecuación y se tiene:

$$y = \frac{1}{2}x^2 + 5x \text{-} 16 \qquad En\ su\ forma\ general$$

$$24 = x^2 + 10x \text{-} 32 \to x^2 + 10x = 2y + 32$$

Completando cuadrados

$$x^2 + 10x + 25 = 2y + 32 + 25$$

$$(x + 5)^2 = 2y + 57 \to (x + 5)^2 = 2\left(y + \frac{57}{2}\right)$$

***7. Encontrar la ecuación general de la elipse cuyas ecuaciones parmétricas son:*** $\boldsymbol{x = \text{-}3 + 2Cost; y = 5t\ Sent}$

Ya que el valor mayor "a" lo tiene x, se trata de una elpse horizontal donde:

$$C(\text{-}2{,}5); a = 2; b = 1$$

Ecuación simétrica:

$$\frac{(x + 3)^2}{4} + \frac{(y \text{-} 5)^2}{1} = 1 \to (x + 3)^2 + 4(y \text{-} 5)^2 = 4$$

$$x^2 + 6x + 9 + 4y^2 \text{-} 40y + 100 = 4$$

$$x^2 + 4y^2 + 6x \text{-} 40y + 105 = 0$$

*8. Encontrar las ecuaciones paramétricas de la elipse:*

$\mathbf{9x^2 + 16y^2 - 18x + 64y - 71 = 0}$

Completando cuadrados:

$9x^2 - 18x \quad + 16y^2 + 64y \quad - 71 = 0$

$9(x^2 - 2x \quad) + 16(y^2 + 4y \quad) - 71 = 0$

$9(x^2 - 2x + 1) + 16(y^2 + 4y + 4) - 71 = 9 + 64$

$9(x-1)^2 + 16(y+2)^2 = 144 \rightarrow \frac{9(x-1)^2}{144} + \frac{16(y+2)^2}{144} = 1$

$\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1 \quad a = 4; b = 3; c(1, -2)$

Las ecuaciones paramétricas son: $x = 1 + 4Cost; y = -2 + 3\,Sent$

*9. Encontrar las ecuaciones paramétricas de la hipérbole*

$\mathbf{\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y-5)^2}{9} = 1}$

La hipérbole es horizontal con centro C(3,5); a=2, b=3, luego las ecuaciones paramétricas son: $x = 3 + 2tgt; y = 5 + 3Sect$

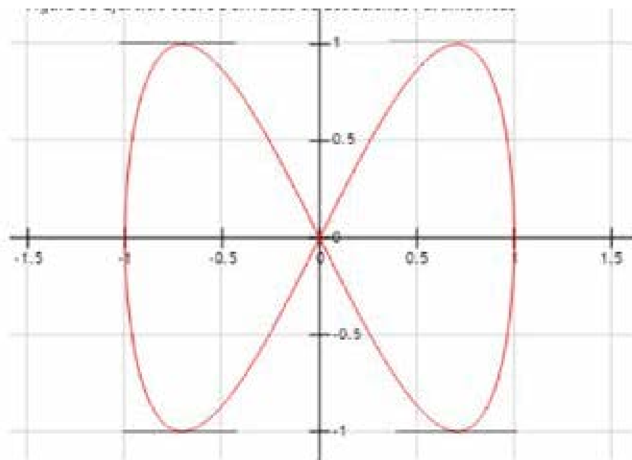
*10. Encontrar la ecuación de la hipérbole cuyas ecuaciones parméticas son:*
$\mathbf{x = 5 + tgt; y = -2 + 3Sect}$

Es una hipérbole vertical con: $C(5, -2); b = 1; a = 3$

La ecuación simétrica es: $\frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-5)^2}{1} = 1$

***11. Graficar la función dada por $x = Cost; y = Sen\,2t$. Encontrar los puntos donde hay tangentes horizontales***

Figura 53
Ejercicio sobre Derivadas de Ecuaciones Paramétricas




$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Hay tangentes horizontales en:

$$\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = 2Cos2t$$

Igualando a cero

$$2Cos2t = 0$$

$Cos2t = 0 \; Para \; 2t = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = \frac{\pi}{4}$

$También \; Cos2t = 0 \; en \; \frac{3\pi}{2} \rightarrow 2t = \frac{3\pi}{2} \rightarrow t = \frac{3\pi}{4}$

$También \; en \; \frac{5\pi}{4} \rightarrow 2t = \frac{5\pi}{2} \rightarrow t = \frac{5\pi}{4} \; y \; en \; \frac{7\pi}{4}$

## *12. Calcular el área total dentro de la curva del ejercicio 11.*

La cuarta parte del área total es:

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} Sen2t(\text{-}Sent)dt$$

$$A = \text{-}\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sen2tSentdt$$

Usando la identidad trigonométrica sen2t=2sent cost

$$= \text{-}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2Sent\;Cost)Sent\;dt = -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sen^2t\;Cost\;dt$$

$Sea\!: u = Sent \rightarrow du = Cost\;dt$

$$= -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^2\;du = -2\left|\frac{u^3}{3}\right|\begin{matrix}\frac{\pi}{2}\\0\end{matrix} = \text{-}\frac{2}{3}|Sen^3t|\begin{matrix}\frac{\pi}{2}\\0\end{matrix} = \text{-}\frac{2}{3}\left(Sen^3\frac{\pi}{2}\text{-}Sen^3 0\right) = \frac{2}{3}u^2$$

$$A_T = 4\frac{2}{3}u^2 = \frac{8}{3}u^2$$

# Solución de ejercicios propuestos sobre Coordenadas Polares

## Coordenadas Polares

### *1. Transformar de polares a rectangulares la función r=2acos$\boldsymbol{\theta}$ e identificar la surva sin necesidad de graficarla*

$r = 2\ a\ Cos\theta \quad Como\ r = \sqrt{x^2 + y^2}; x = rCos\theta \rightarrow Cos\theta = \dfrac{x}{r}$

$\sqrt{x^2 + y^2} = 2a\dfrac{x}{r} = 2a\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Pasando al lado izquierdo la raíz que está en el denominador

$x^2 + y^2 = 2ax \rightarrow x^2\text{-}2a + y^2 = 0$

Completando cuadrados y balanceando la ecuación

$x^2\text{-}2a + a^2 + y^2 = a^2$

$(x\text{-}a)^2 + (y\text{-}0)^2 = a^2$

Es la ecuación de una circunferencia con centro en (a,0) y radio a.

***2. Demostrar matemáticamente que r=acos$\boldsymbol{\theta}$+bsen$\boldsymbol{\theta}$ es un círculo cuyo centro está en (a/2,b/2), su radio es $r = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ y corta al eje x en (a,0) y al eje y en (0,b)***

$r = aCos\theta + bSen\theta$

$\sqrt{x^2+y^2} = a\frac{x}{r} + b\frac{y}{r} \rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \frac{ax+by}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$x^2 + y^2 = ax + by$ ① $\quad x^2\text{-}ax + y^2\text{-}by = 0$

$x^2\text{-}ax + \frac{a^2}{4} + y^2\text{-}by + \frac{b^2}{4} = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}$

$(x\text{-}\frac{a}{2})^2 + (y\text{-}\frac{b}{2})^2 = \frac{a^2+b^2}{4}$

Es una circunferencia con centro en $C\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right) r = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$

Reemplazando en la ecuación ① x=0 se tiene

$y^2 = by \rightarrow y = b\ Corta\ al\ eje\ y\ en\ (0,b)$

Reemplazando en la ecuación ① y=0 se tiene

$x^2 = ax \rightarrow x = a\ Corta\ al\ eje\ x\ en\ (a,0)$

Comprobar graficando

***3. Convertir la ecuación dada en polares por r=sen$\boldsymbol{\theta}$ a rectangulares e indicar el tipo de curva***

$r = \sqrt{x^2+y^2} \quad Sen\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Reemplazando en la ecuación polar:

$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \rightarrow x^2 + y^2\text{-}y = 0$

Es cun círculo con centro en $C\left(-\frac{D}{2},\frac{E}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},0\right)$

Comprobar graficando

***4. Convertir la siguiente ecuación dada en rectangulares a polares: 3x–2y+2=0***

Reemplazando x por rcos$\boldsymbol{\theta}$; y por rsen$\boldsymbol{\theta}$ se tiene:

$$3rCos\theta\text{-}rSen\theta+2=0\to r(3Cos\theta\text{-}Sen\theta)=-2$$

$$r=\frac{2}{Sen\theta\text{-}3Cos\theta}$$

***5. Encontrar una fórmula para la distancia entre dos puntos en coordenadas polares***

Sean $(x_2,y_2)$ $(x_1,y_1)$ los puntos en coordenadas rectangulares

$$d=\sqrt{(x_2\text{-}x_1)^2+(y_2\text{-}y_1)^2}$$

$$Pero: x_2=r_2\ Cos\theta_2\to\ x_1=r_1\ Cos\theta_1$$

$$y_2=r_2\ Sen\theta_2\to\ x_2=y_1\ Sen\theta_1$$

Reemplazando en la fórmula para d:

$$d=\sqrt{(r_2Cos\theta_2\text{-}r_1Cos\theta_1)^2+(r_2Sen\theta_2\text{-}r_1Sen\theta_1)^2}$$

$$=\sqrt{r_2^2Cos^2\theta_2\text{-}2r_2r_1Cos\theta_2Cos\theta_1\text{-}r_1^2Cos^2\theta_1\text{-}r_2^2Sen^2\theta_2\text{-}2r_2r_1Sen\theta_2Sen\theta_1+r_1^2Sen^2\theta_1}$$

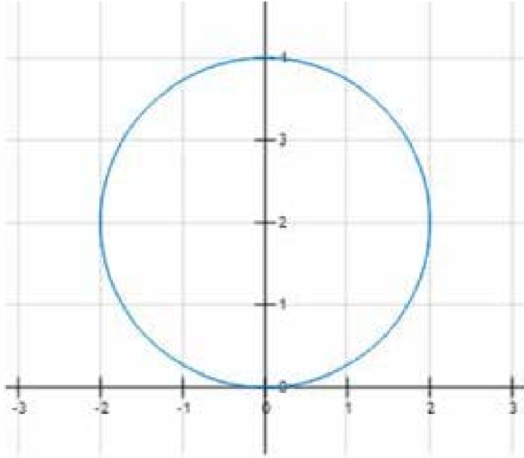
$$=\sqrt{r_2^2(Cos^2\theta_2+Sen^2\theta_2)+r_1^2(Cos^2\theta_2+Sen^2\theta_1)-2r_2r_1(Cos\theta_2Cos\theta_1+Sen\theta_2Sen\theta_1}$$

Aplicando identidades trigonomgétricas

$$d=\sqrt{r_2^2+r_1^2+Cos(\theta_2\text{-}\theta_1)}$$

## *6. Calcular el área encerrada por la curva r=4sen$\boldsymbol{\theta}$*

Figura 54
Ejercicio sobre Áreas en Coordenadas Polares




$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4Sen\theta)^2 d\theta = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sen^2 d\theta$$

$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 - Cos2\theta) = 4\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \text{ - } \int_0^{\frac{\pi}{2}} Cos2\theta\, d\theta\right]$$

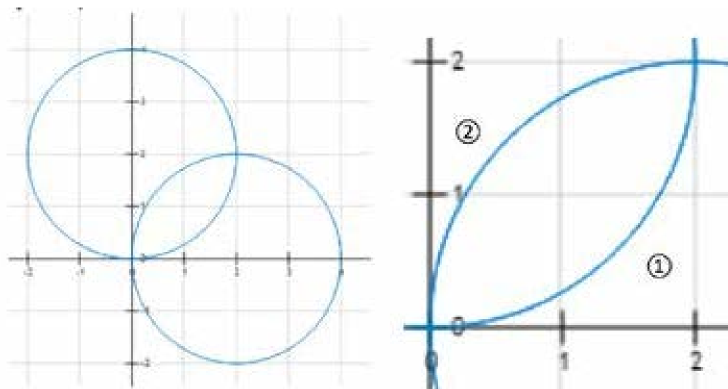
$$= 4\left[|\theta|\begin{matrix}\frac{\pi}{2}\\ 0\end{matrix} — \left|\frac{Sen2\theta}{2}\right|\begin{matrix}\frac{\pi}{2}\\ 0\end{matrix}\right] = 4\left[\frac{\pi}{2}\right] = 2\pi$$

El área calculada es la mitad del círculo. El área total será el doble:

$A = 4\pi$

## *7. Calcular el área comprendida entre r=4sen$\boldsymbol{\theta}$ y r=4cos$\boldsymbol{\theta}$*

Figura 55
Ejercicio sobre Áreas en Coordenadas Polares




Los puntos de intersección se obtienen igualando las ecuaciones

r=4sen$\boldsymbol{\theta}$ y r=4cos$\boldsymbol{\theta}$

Los ángulos para el cual es igual sen$\theta$ al cos$\theta$ son 0 y $\pi/4$

Para $\theta=0$, r=0; para $\theta=\pi/4$, $r=\sqrt{2}$

La figura de la derecha es una ampliación del área de intersección de la figura izquierda. En la figura derecha se puede apreciar una diagonal que divide el área de intersección. ① y ② son áreas diferenciales.

Para el cálculo del área de la mitad inferior se usa r=4sen$\theta$, el área diferencial ① y los límites de integración para $\theta$ son 0 a $\pi/4$.

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(4Sen\theta)^2d\theta$$

$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{4}} Sen^2\theta d\theta = 8\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}(1 - Cos2\theta)d\theta$$

$$= 4\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{4}} Cos2\theta d\theta\right] = 4\left[|\theta|\begin{matrix}\frac{\pi}{4}\\0\end{matrix} - \left|\frac{Sen2\theta}{2}\right|\begin{matrix}\frac{\pi}{4}\\0\end{matrix}\right]$$

$$= 4\left[\frac{\pi}{4} - \frac{Sen\left(2\frac{\pi}{4}\right)}{2}\right] = 4\left[\frac{\pi}{4} - \frac{Sen\frac{\pi}{2}}{2}\right] = 4\left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right] = \pi - 2$$

Para la mitad superior del área sombreada se trabaja con la curva r=4cosθ, el área diferencial ② y los límites de integración para θ son π/4 a π/2.

$$A = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (4Cos\theta)^2 d\theta = 8\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} Cos^2\theta d\theta$$

$$= 8\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 + Cos2\theta)d\theta = 4\left[\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} Cos2\theta d\theta\right]$$

$$= 4\left[|\theta|\begin{matrix}\frac{\pi}{2}\\\frac{\pi}{4}\end{matrix} + \left|\frac{Sen2\theta}{2}\right|\begin{matrix}\frac{\pi}{2}\\\frac{\pi}{4}\end{matrix}\right] = 4\left[\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{Sen\left(2\frac{\pi}{2}\right) - Sen\left(2\frac{\pi}{4}\right)}{2}\right)\right]$$

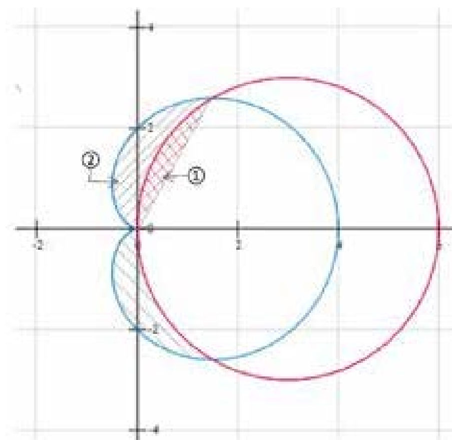
$$= 4\left[\frac{\pi}{4} + \frac{0 - 1}{2}\right] = 4\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \pi - 2$$

El área total es la suma de las dos áreas ya calculadas:

$$A = (\pi - 2) + (\pi - 2) = 2\pi - 4$$

***8. Calcular el área de intersección que se encuentra del lado de afuera de la curvas r=6cos$\boldsymbol{\theta}$ y dentro de r=2cos$\boldsymbol{\theta}$+2***

Figura 56
Ejercicio sobre Áreas en Coordenadas Polares




Cálculo de los puntos de intersección de las curvas:

$$6Cos\theta = 2Cos\theta + 2$$

$$3Cos\theta = Cos\theta + 1$$

$$2Cos\theta = 1 \quad Cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = Cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \; \frac{5\pi}{3}$$

Los puntos de intersección son: (3,$\pi$/3) y (3,5$\pi$/3)

Ya que la figura es simétrica con respecto al eje x, se trabajará solo con la parte superior.

El área pedida se calcula restanto $A_2$-$A_1$ integrada entre $\pi$/3 y $\pi$ para $A_2$ y entre $\pi$/3 y $\pi$/2 para $A_1$.

$$A_2 = \int_{\pi/3}^{\pi} \frac{1}{2}(2cos\theta + 2)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(4Cos^2\theta + 8Cos\theta + 4)d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} 4Cos^2\theta d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} 8Cos\theta d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} 4d\theta$$

$$= 2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{1}{2}(1 + cos2\theta)d\theta + 4|sen\theta|\,_{\pi/3}^{\pi} + 2|\theta|\,_{\pi/3}^{\pi}$$

$$= |\theta|\,_{\pi/3}^{\pi} + \frac{1}{2}|sen2\theta|\,_{\pi/3}^{\pi} + 4|sen\theta|\,_{\pi/3}^{\pi} + 2|\theta|\,_{\pi/3}^{\pi}$$

$$= 3|\theta|\,_{\pi/3}^{\pi} + \frac{1}{2}|sen2\theta|\,_{\pi/3}^{\pi} + 4|sen\theta|\,_{\pi/3}^{\pi}$$

$$= 3\left(\pi\text{-}\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(sen2\pi\text{-}sen\frac{2\pi}{3}\right) + 4(sen\pi\text{-}sen\ \pi/3\ )$$

$$= 2\pi + \frac{1}{2}\left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 4\left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\pi\text{-}\frac{9\sqrt{3}}{4} \approx 2.38$$

$$A_1 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(6cos\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 36Cos^2\theta d\theta = 18\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(1 + cos2\theta)d\theta$$

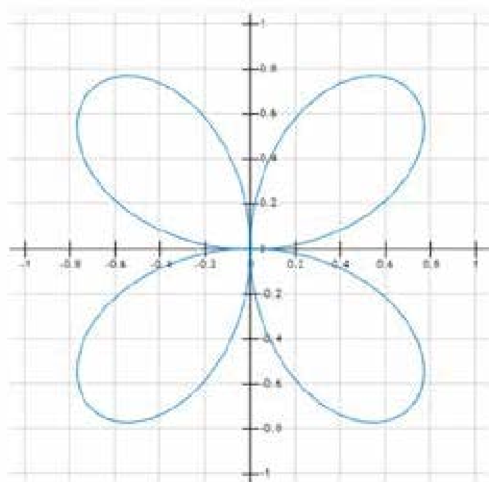
$$= 9\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta + 9\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} cos2\theta d\theta = 9|\theta|\,_{\pi/3}^{\pi/2} + \frac{9}{2}|sen2\theta|\,_{\pi/3}^{\pi/2}$$

$$= 9\left(\frac{\pi}{2}\text{-}\frac{\pi}{3}\right) + \frac{9}{2}\left(sen\pi\text{-}sen\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3\pi}{2} + \frac{9}{2}\left(\text{-}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}\text{-}\frac{9\sqrt{3}}{4} \approx 0.81$$

$$A_2\text{-}A_1 = 2\pi\text{-}\frac{9\sqrt{3}}{4}\text{-}\left(\frac{3\pi}{2}\text{-}\frac{9\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\pi}{2} \approx 1.57$$

### *9. Calcular el área encerrada por r=sen$\theta$*

Figura 57
Ejercicio sobre Áreas en Coordenadas Polares



Área de uno de los pétalos

$r = 0 \quad 0 = Sen2\theta \rightarrow 2\theta = Sen^{-1}(0)$

$2\theta = 0, \pi, 2\pi \ etc \ldots$

$\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi \ etc \ldots$

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (Sen2\theta)^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 - Cos4\theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \text{-} \int_0^{\frac{\pi}{2}} Cos4\theta d\theta\right] = \frac{1}{4}\left[|\theta|\begin{matrix}\frac{\pi}{2}\\0\end{matrix} \text{-} \left|\frac{Sen4\theta}{4}\right|\begin{matrix}\frac{\pi}{2}\\0\end{matrix}\right]$$

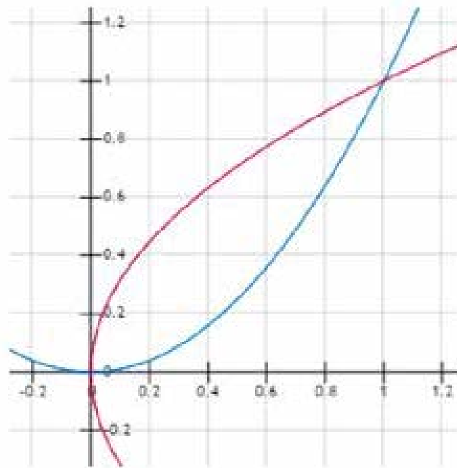
$$=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\pi}{2}\text{-}0\right)\text{-}\frac{1}{4}\left(Sen4\frac{\pi}{2}\text{-}Sen(0)\right]\right.$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{\pi}{2}\text{-}\frac{1}{4}(0-0)\right]=\frac{1}{8}\pi$$

El área de los cuatro pétalos es: $A_T=4\left(\frac{1}{8}\pi\right)=\frac{1}{2}\pi\ u^2$

### *10. Encontrar le área encerrada por las curvas r=tg**θ**sec**θ** y r=cotg**θ**cosc**θ***

Figura 58
Ejercicio sobre Áreas en Coordenadas Polares




Punto de corte:

$$tg\theta\ Sec\theta=Cotg\theta\ Cosc\theta$$

$$\frac{Sen\theta}{Cos^2\theta}=\frac{Cos\theta}{Sen^2\theta}\rightarrow Sen^3\theta=Cos^3\theta$$

$$Sen\theta=Cos\theta$$

El ángulo que corresponde a esa igualdad es: $\theta = \frac{\pi}{4}$

El otro punto que cumple esta igualdad en el origen en donde r=0 y el sen***θ*** para la parábola horizontal es 1 y el cos***θ*** para la parábola vertical es 1. Luego los límites para ***θ*** van de 0 a ϖ/4.

$$A_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^2\theta Sec^2\theta d\theta$$

$$Sea: u = tg\theta \rightarrow du = Sec^2\theta d\theta$$

$$A_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} u^2 du = \frac{1}{2}\left|\frac{u^3}{3}\right|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{6}\left|tg^3\theta\right|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{6}\left(tg^3\frac{\pi}{4} \text{-} tg^3\, 0\right) = \frac{1}{6}$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} Cotg^2\theta\ Cosc^2\theta\ d\theta$$

$$Sea: u = Cotg\theta \rightarrow du = \text{-}Cosc^2\theta\ d\theta$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \text{-}u^2 du = \text{-}\frac{1}{2}\left|\frac{u^3}{3}\right|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \text{-}\frac{1}{6}\left|Cotg^3\theta\right|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$A_2 = \text{-}\frac{1}{6}\left(Cotg^3\frac{\pi}{2} \text{-} Cotg^3\frac{\pi}{4}\right) = \text{-}\frac{1}{6}(0-1) = \frac{1}{6}$$

$$A_T = A_1 + A_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}u^2$$

El estudiante puede comprobar ese resultado convirtiendo las ecuaciones a rectangulares e integrando como se muestra a continuación:

$$A = \int_0^1 (y_2 \text{-} y_1)dx = \int_0^1 (\sqrt{x} \text{-} x^2)dx$$

$$= \left|{}_{0}^{1} \sqrt{x}\, dx \right|{}_{0}^{1} x^{2}\, dx = \left|\frac{x^{3/2}}{3/2}\right|{}_{0}^{1} - \left|\frac{x^{3}}{3}\right|{}_{0}^{1}$$

$$= \frac{2}{3}(1— 0) - \frac{1}{3}(1— 0) = \frac{2}{3} — \frac{1}{3} = \frac{1}{3}u^{2}$$